معامل التأثير العربي 2.17
العدد 26

مجلة التربوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X

مجلة التربوي

مجلة علمية محكمة تصدر عن كلية التربية

بجامعة المرقب

العدد السادس والعشرين
يناير 2025م

هيئـــة التحريـر

رئيس هيئة التحرير: د. سالم حسين المدهون
مدير التحرير: د. عطية رمضان الكيلاني
سكرتير المجلة: أ. سالم مصطفى الديب

- المجلة ترحب بما يرد عليها من أبحاث وعلى استعداد لنشرها بعد التحكيم .
- المجلة تحترم كل الاحترام آراء المحكمين وتعمل بمقتضاها .
- كافة الآراء والأفكار المنشورة تعبر عن آراء أصحابها ولا تتحمل المجلة تبعاتها .
- يتحمل الباحث مسؤولية الأمانة العلمية وهو المسؤول عما ينشر له .
- البحوث المقدمة للنشر لا ترد لأصحابها نشرت أو لم تنشر .

(حقوق الطبع محفوظة للكلية)

ضوابط النشر:

يشترط في البحوث العلمية المقدمة للنشر أن يراعى فيها ما يأتي :

- أصول البحث العلمي وقواعده .
- ألا تكون المادة العلمية قد سبق نشرها أو كانت جزءا من رسالة علمية .
- يرفق بالبحث تزكية لغوية وفق أنموذج معد .
- تعدل البحوث المقبولة وتصحح وفق ما يراه المحكمون .
- التزام الباحث بالضوابط التي وضعتها المجلة من عدد الصفحات ، ونوع الخط ورقمه ، والفترات الزمنية الممنوحة للتعديل ، وما يستجد من ضوابط تضعها المجلة مستقبلا .

تنبيهات :

- للمجلة الحق في تعديل البحث أو طلب تعديله أو رفضه .
- يخضع البحث في النشر لأولويات المجلة وسياستها .
- البحوث المنشورة تعبر عن وجهة نظر أصحابها ، ولا تعبر عن وجهة نظر المجلة .

Information for authors

1- Authors of the articles being accepted are required to respect the regulations and the rules of the scientific research.
2- The research articles or manuscripts should be original and have not been published previously. Materials that are currently being considered by another journal or is a part of scientific dissertation are requested not to be submitted.
3- The research articles should be approved by a linguistic reviewer.
4- All research articles in the journal undergo rigorous peer review based on initial editor screening.
5- All authors are requested to follow the regulations of publication in the template paper prepared by the editorial board of the journal.

Attention

1- The editor reserves the right to make any necessary changes in the papers, or request the author to do so, or reject the paper submitted.
2- The research articles undergo to the policy of the editorial board regarding the priority of publication.
3- The published articles represent only the authors' viewpoints.

مجلة التربوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3

معامل التأثير العربي 2.17 لسنة 2024
العدد 26 يناير 2025

Some Oscillation Criteria for a Class of Nonlinear Second Order Damped Differential Equations

M. J. Saad[1], N. Kumaresan[2] and Kuru Ratnavelu[2]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Education, Sirte University, Sirte- Libya.
[2]Institute of Mathematical Sciences, University Of Malaya, 50603, Kuala Lumpur, Malaysia.

Abstract:

This paper deals with the oscillatory behavior of solutions of the second order nonlinear ordinary differential equation of the form

$$\left(r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t)\right)^{\bullet} + h(t)\dot{x}(t) + q(t)\Phi(g(x(t)), r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t)) = H(t, x(t), \dot{x}(t))$$

Our results which obtained by using Riccati Technique, complement and improve some beforehand results obtained in the literature. Some illustrated examples are presented.

Keywords: Second Order, Damped Differential Equations, Oscillatory Behavior, Riccati Technique.
AMO (MOS) Subject Classification: 34 A 34, 34 K 11.

1. Introduction

Consider the second order non-linear ordinary differential equation of the form

$$\left(r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t)\right)^{\bullet} + h(t)\dot{x}(t) + q(t)\Phi(g(x(t)), r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t)) = H(t, x(t), \dot{x}(t)) \qquad (1)$$

Where r, h and q are continuous functions on the interval $[t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0, \Psi \in C(R, R^+)$ and $r(t)$ is a positive function. g is continuously differentiable function on the real line $\mathbb{R}$ except possibly at 0 with $xg(x) > 0$ and $g'(x) \geq k > 0$ for all $x \neq 0, \Phi$ is a continuous function on $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ with $u\Phi(u, v) > 0$ for all $u \neq 0$ and $\Phi(\lambda u, \lambda v) = \lambda\Phi(u, v)$ for any $\lambda \in (0, \infty)$ and H is a continuous function on $[t_0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ with $H(t, x(t), \dot{x}(t)) \big/ g(x(t)) \leq p(t)$ for all $x \neq 0$ and $t \geq t_0$.

Throughout this paper, we restrict our attention only to the solutions of the differential ordinary equation (1) that exist on some ray $[t_x, \infty)$, where t_x may depend on the particular solution.

A solution $x(t)$ of the differential equation (1) is said to be oscillatory if it has arbitrary large zeros, and otherwise it is said to be non-oscillatory. Equation (1) is called oscillatory if all its solutions are oscillatory, and otherwise it is called non-oscillatory. Particular cases of the equation (1) have been considered by many authors for example [1-19]. Some of these particular cases can be classified as follows

$$\ddot{x}(t)+q(t)x(t)=0 \qquad (2)$$

$$\ddot{x}(t)+q(t)\Phi(x(t),\dot{x}(t))=0 \qquad (3)$$

$$\left(r(t)\dot{x}(t)\right)^{\bullet}+q(t)\,g(x(t))=H\left(t,x(t)\right) \qquad (4)$$

$$\left(r(t)\dot{x}(t)\right)^{\bullet}+p(t)\dot{x}(t)+q(t)\,f\,(g(x(t)))=0 \qquad (5)$$

$$\left(r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t)\right)^{\bullet}+q(t)\,g(x(t))=0 \qquad (6)$$

$$\left(r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t)\right)^{\bullet}+q(t)\Phi(g(x(t)),r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t))=0 \qquad (7)$$

The oscillation of linear equation (2) has brought the attention of many authors since because of Fite [5]. He proved that if $q(t)>0$ for all $t\geq t_0$ and $\int_{t_0}^{\infty}q(s)\,ds=\infty,$ then every solution of the equation (2) is oscillatory. Wintner [18] extended the result of Fite [5] to an equation in which q is of arbitrary sign and supposed that

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}(t-s)q(s)ds=\infty,$$

then, every solution of the equation (2) is oscillatory. In the following, Kamenev [9] has proved a new integral criterion for the oscillation of the differential equation (2) based on the use of the n the primitive of the coefficient $q(t)$, which has Wintner's result [18] as a particular case. He has showed that the equation (2) is oscillatory if

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n-1}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}q(s)\,ds=\infty,$$

for some integer $n\geq 3$. The oscillation of the equation (3) has brought the attention of some authors because of Bihari [3] who has proved that if $q(t)>0$ for all $t\geq t_0$ and

$$\int_{t_0}^{\infty}q(s)ds=\infty,$$

then, every solution of the equation (3) is oscillatory. The following result extended the result of Bihari [3] to an equation in which q is of arbitrary sign, in this theorem, Kartsatos [10] has supposed

(i) There exists a constant $C\in R^{-}=(-\infty,0)$ such that

$$G(m)=\int_{0}^{m}\frac{du}{\Phi(1,u)}\geq -C \text{ for all } m\in R,$$

(ii) $\int_{t_0}^{\infty} q(s)ds = \infty,$

then, every solution of equation (3) is oscillatory. Many authors are concerned with the oscillation criteria of solutions of the homogeneous second order nonlinear differential equations. However, of the non-homogeneous equation, little is known. Greaf et al. [8] gave some oscillation theorems for the non-homogeneous equation (4), they proved that if

(1) $r(t) \le a_1, a_1 > 0,$

(2) $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} \big(q(u) - p(u)\big) du ds = \infty,$

then, all solutions of equation (4) are oscillatory.

Beqiri et al. [2] have considered the differential equation (5) and established some sufficient conditions for oscillation of the equation (5). Grace [6], Elabbasy [4], Manojlovic [11] and Tiryaki et al. [16] obtained some results for the oscillation of equation (6). Saad et al. [14] by using the Riccati technique, have studied the oscillatory and non-oscillatory solutions of the equation (7) and established some oscillation results for the equation (7).

2. MAIN RESULTS

In this section, Riccati technique is used to reduce the higher-order equations to the first-order Riccati equation or inequality to establish sufficient conditions for oscillation of (1). Comparisons between our results and the previously known are presented and some examples illustrate the main results.

Theorem2.1: Suppose that

(1) $a_1 \le \Psi(x) \le a_2$, $a_1, a_2 > 0$ and for $x \in R,$

(2) $G(m) = \int_0^m \frac{ds}{\Phi(1,s)} > -B^*,\ B^* > 0$ *for every* $m \in \mathrm{R}.$

Assume that there exists ρ be a positive continuous differentiable function on the interval $[t_0, \infty)$ with $\rho(t)$ is an increasing function on the interval $[t_0, \infty)$ and such that

(3) $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\rho(t)} \int_T^t \rho(s)\left[C_0 q(s) - p(s) - \frac{h^2(s)}{4a^* r(s)} \right] ds = \infty,$

where, $p : [t_0, \infty) \to (0, \infty)$, then every solution of equation (1) is oscillatory.

Proof: Without loss of generality, we may assume that there exists a solution $x(t)$ of equation (1) such that $x(t) > 0$ *on* $[T, \infty)$ *for some* $T \ge t_0 \ge 0$. Define

$$\omega(t) = \frac{\rho(t) r(t) \Psi(x(t)) \dot{x}(t)}{g(x(t))}, \quad t \ge T$$

By equation (1) and condition (1), we obtain

$$\dot{\omega}(t) \le \rho(t) p(t) - \frac{\rho(t) h(t) \dot{x}(t)}{g(x(t))} - \rho(t) q(t) \Phi(1, \omega(t)/\rho(t)) + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \omega(t) - \frac{a_1 k \rho(t) r(t) \dot{x}^2(t)}{g^2(x(t))}, \quad t \ge T$$

Thus, we have

$$\rho(t)\left(\frac{\omega(t)}{\rho(t)}\right)^{\bullet} \le \rho(t)p(t) - \rho(t)q(t)\Phi(1,\omega(t)/\rho(t)) - \frac{\rho(t)h(t)\dot{x}(t)}{g(x(t))} - \frac{a_1 k\rho(t)r(t)\ddot{x}(t)}{g^2(x(t))}, t \ge T$$

Dividing the last inequality by $\Phi(1,\omega(t)/\rho(t)) > 0$, we have

$$\frac{\rho(t)(\omega(t)/\rho(t))^{\bullet}}{\Phi(1,\omega(t)/\rho(t))} \le \frac{\rho(t)p(t)}{\Phi(1,\omega(t)/\rho(t))} - \rho(t)q(t) - \frac{\rho(t)h(t)\dot{x}(t)}{\Phi(1,\omega(t)/\rho(t))g(x(t))} - \frac{a_1 k\rho(t)r(t)\ddot{x}(t)}{\Phi(1,\omega(t)/\rho(t))g^2(x(t))},\ t \ge T$$

Since $\Phi(1,\omega(t)/\rho(t)) > 0$ then, there exists a positive constant C_0 such that $\Phi(1,\omega(t)/\rho(t)) > C_0$

thus, $0 < \frac{1}{\Phi(1,\omega(t)/\rho(t))} < \frac{1}{C_0}$.

Then, for $t \ge T$, we obtain

$$\rho(t)[C_0 q(t) - p(t)] \le -\frac{C_0\rho(t)(\omega(t)/\rho(t))^{\bullet}}{\Phi(1,\omega(t)/\rho(t))} - \frac{C_0\rho(t)h(t)\dot{x}(t)}{\Phi(1,\omega(t)/\rho(t))g(x(t))} - \frac{C_0 a_1 k\rho(t)r(t)\ddot{x}(t)}{\Phi(1,\omega(t)/\rho(t))g^2(x(t))},\ t \ge T$$

Integrate the last inequality from T to t, we obtain

$$\int_T^t \rho(s)[C_0 q(s) - p(s)]ds \le -C_0\int_T^t \frac{\rho(s)(\omega(s)/\rho(s))^{\bullet}}{\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}ds$$

$$-C_0\int_T^t \left[\frac{\rho(s)h(s)}{\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}\frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))} + \frac{a_1 k\rho(s)r(s)}{\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}\frac{\ddot{x}(s)}{g^2(x(s))}\right]ds \qquad (1-1)$$

Since $\rho(t)$ in the first integral in R. H. S. of the inequality (1-1) is an increasing function and by applying the Bonnet's theorem, we see that for each $t \ge T$, there exists $T_1 \in [T,t]$ such that

$$-\int_T^t \frac{\rho(s)(\omega(s)/\rho(s))^{\bullet}}{\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}ds = -\rho(t)\int_{T_1}^t \frac{(\omega(s)/\rho(s))^{\bullet}}{\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}ds \qquad (1\text{-}2)$$

From the second integral in R. H. S. of (1-1), we have

$$-C_0\int_T^t \left[\frac{\rho(s)h(s)}{\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}\frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))} + \frac{a_1 k\rho(s)r(s)}{\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}\frac{\ddot{x}(s)}{g^2(x(s))}\right]ds =$$

$$-C_0\int_T^t \left[\sqrt{\frac{a_1 k\rho(s)r(s)}{\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}}\frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho(s)}{a_1 kr(s)\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}}h(s)\right]^2 ds + \frac{C_0}{4a_1 k}\int_T^t \frac{\rho(s)h^2(s)}{r(s)\Phi(1,\omega(s)/\rho(s))}ds$$

$$\le \frac{1}{4a^*}\int_T^t \frac{\rho(s)h^2(s)}{r(s)}ds \qquad (1-3)$$

Where $a^* = a_1 k$.

From inequality (1-2) and (1-3) in inequality (1-1), we have

$$\int_T^t \rho(s)\left[C_0 q(s) - p(s) - \frac{h^2(s)}{4a^* r(s)}\right]ds \le -C_0\rho(t)\int_{T_1}^t \frac{\left(\omega(s)/\rho(s)\right)^\bullet}{\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}ds$$

$$\le -C_0\rho(t)\int_{\omega(T_1)/\rho(T_1)}^{\omega(t)/\rho(t)} \frac{du}{\Phi(1,u)}$$

By condition (2), dividing the last inequality by $\rho(t)$ and taking the limit superior on both sides, we obtain

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{\rho(t)}\int_T^t \rho(s)\left[C_0 q(s) - p(s) - \frac{h^2(s)}{4a^* r(s)}\right]ds \le -C_0 \limsup_{t\to\infty}\int_{\omega(T_1)/\rho(T_1)}^{\omega(t)/\rho(t)} \frac{du}{\Phi(1,u)}$$

$$\le -C_0 \limsup_{t\to\infty}\left[-\int_0^{\omega(T_1)/\rho(T_1)} \frac{du}{\Phi(1,u)} + \int_0^{\omega(t)/\rho(t)} \frac{du}{\Phi(1,u)}\right]$$

$$\le C_0 \limsup_{t\to\infty}\left[G\left(\frac{\omega(T_1)}{\rho(T_1)} - G\left(\frac{\omega(t)}{\rho(t)}\right)\right)\right]$$

$$\le C_0 \limsup_{t\to\infty}\left(G\left(\frac{\omega(T_1)}{\rho(T_1))}\right) + B^*\right) < \infty,$$

as $t \to \infty$, which contradicts to the condition (3). Hence the proof is completed.

Example2.1:

Consider the differential equation

$$\left(\frac{x^2(t)+2}{x^2(t)+1}\dot{x}(t)\right)^\bullet + \frac{\dot{x}(t)}{t^3} + \left(\frac{t^3+3\cos t}{t^2}\right)x(t) = \frac{x(t)\dot{x}^{\bullet 4}(t)\cos x(t)}{t^4(\dot{x}^{\bullet 4}(t)+1)},\ t>0.$$

We have $r(t)=1,\ h(t)=\frac{1}{t^3}, q(t)=\frac{t^3+3\cos t}{t^2},\ g(x)=x,\ \Phi(u,v)=u$ and

(1) $\Psi(x)=\frac{x^2(t)+2}{x^2(t)+1}>0$ *and* $1\le\Psi(x)=1+\frac{1}{x^2(t)+1}\le 2$ *for all* $x\in R$.

(2) $\frac{H(t,x(t),\dot{x}(t))}{g(x(t))}=\frac{\cos x(t)\dot{x}^{\bullet 4}(t)}{t^4(\dot{x}^{\bullet 4}(t)+1)}\le\frac{1}{t^4}=p(t)$ for all $t>0$ and $x\neq 0$. Taking $\rho(t)=t^2$ such that

(3) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{\rho(t)}\int_T^t \rho(s)\left[C_0 q(s) - p(s) - \frac{h^2(s)}{4a^* r(s)}\right]ds = \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_T^t s^2\left[\frac{C_0 s^3+3C_0\cos s}{s^2} - \frac{1}{s^4} - \frac{1}{4a^* s^6}\right]ds$$

$$=\infty.$$

All conditions of Theorem2.1 are satisfied and hence every solution of the given equation is oscillatory. To ensure that our result in Theorem2.1 is true we also find the numerical solutions of the given differential equation in Example2.1 using the Runge Kutta method (RK4).

We have

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{x\cos(x)\dot{x}^4}{\dot{x}^4 + 1} - \dot{x} - 3.9x$$

with initial conditions $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 1$ on the chosen interval $[1,100]$, the function $\Psi(x) \equiv 1$ and finding values of the functions *r*, *q*, *f* and *h* where we consider $H(t, x, \dot{x}) = f(t)l(x, \dot{x})$ at t=1, n=900 and h=0.9999.

k	t_k	$x(t_k)$
1	1	1
2	0.0001	0.0001
3	0.0001	0.0001
.	.	.
.	.	.
8	0.0002	-0.0094
9	0.0002	-0.0175
10	0.0002	-0.024
.	.	.
.	.	.
24	0.0003	0.0002
25	0.0003	0.0043
26	0.0004	0.0079
.	.	.
.	.	.
37	0.0005	-0.0002
38	0.0005	-0.002
39	0.0005	-0.0035

Table 1: Numerical Solution of ODE

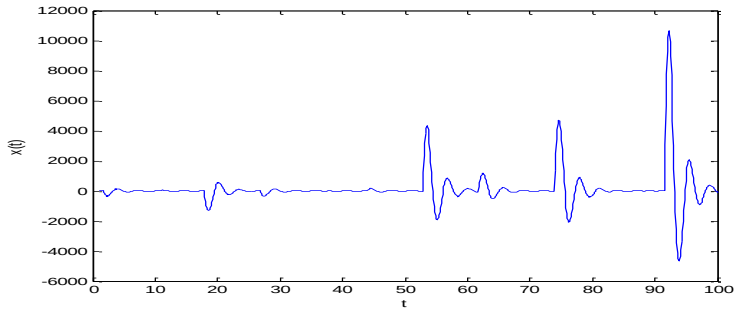

Figure1: Solution Curve of ODE 1

Remark 2.1: Theorem 2.1 is extension of the results of Bihari [3], Kartsatos [10], Kamenev [9], Saad et al. [14] and Wintiner [18]. All results of them [3], [10], [9], [14] and [18] cannot be applied to the given equation in example2.1.

Theorem 2.2: Suppose, in addition to the conditions (1) and (2) hold that

(4) $h(t) \geq 0 \quad for\ t \geq t_0$,

(5) $\Phi(1,v) \leq C_1, C_1 > 0 \ \ for\ v \in R,$

(6) $\dfrac{1}{\Phi(1,v)} \leq v \quad for\, all\, v \in R_+.$

Assume that ρ be a positive continuous differentiable function on the interval $[t_0,\infty)$ with $\rho(t)$ is a decreasing function on the interval $[t_0,\infty)$ and such that

(7) $$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t \rho(s)\left[q(s) - k_1 r(s) p^2(s) - k_2 \frac{h^2(s)}{r(s)} \right] ds = \infty,$$

where, $k_1 = a_2 C_1 / 4k$, $k_2 = a_2 / 4k a_1^2 C_2$ and $p:[t_0,\infty) \to (0,\infty)$, then every solution of equation (1) is oscillatory.

Proof: Without loss of generality, we may assume that there exists a solution $x(t)$ of equation (1) such that $x(t) > 0$ *on* $[T,\infty)$ *for some* $T \geq t_0 \geq 0$. Define

$$\omega(t) = \frac{\rho(t) r(t) \Psi(x(t)) \dot{x}(t)}{g(x(t))},\ t \geq T$$

Thus, by equation (1) and condition (1), we have

$$\dot{\omega}(t) \leq \rho(t) p(t) - \frac{h(t)}{r(t)\Psi(x(t))} \omega(t) - \rho(t) q(t) \Phi(1, \omega(t)/\rho(t)) + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \omega(t) - \frac{k}{a_2 r(t) \rho(t)} \omega^2(t)$$

From the last inequality, we get

$$\rho(t)\left(\frac{\omega(t)}{\rho(t)}\right)^{\bullet} \leq \rho(t) p(t) - \frac{h(t)}{r(t)\Psi(x(t))} \omega(t) - \rho(t) q(t) \Phi(1, \omega(t)/\rho(t)) - \frac{k}{a_2 r(t) \rho(t)} \omega^2(t), t \geq T$$

Dividing the last inequality by $\Phi(1, \omega(t)/\rho(t)) > 0$ and by condition (5), we have

$$\frac{\rho(t)\left(\omega(t)/\rho(t)\right)^{\bullet}}{\Phi(1, \omega(t)/\rho(t))} \leq \left(p(t) - \frac{h(t)}{r(t)\Psi(x(t))\Phi(1, \omega(t)/\rho(t))} \right) \omega(t) - \rho(t) q(t) - \frac{k}{a_2 r(t) \rho(t) \Phi(1, \omega(t)/\rho(t))} \omega^2(t)$$

Integrate the last inequality from *T* to *t*, we obtain

$$\int_T^t \frac{\rho(s)\left(\omega(s)/\rho(s)\right)^{\bullet}}{\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}ds \le -\int_T^t \rho(s)q(s)ds$$

$$-\int_T^t \left(\sqrt{\frac{k}{a_2 r(s)\rho(s)\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}}\omega(s) - \frac{\left(p(s)-h(s)/r(s)\Psi(x(s))\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)\right)}{2\sqrt{k/a_2 r(s)\rho(s)\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}} \right)^2 ds$$

$$+\frac{a_2}{4k}\int_T^t r(s)\rho(s)\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)\left(p(s) - \frac{h(s)}{r(s)\Psi(x(s))\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)} \right)^2 ds$$

Then, for $t \ge T$ and by conditions (1), (4) and (5), we get

$$\int_T^t \frac{\rho(s)\left(\omega(s)/\rho(s)\right)^{\bullet}}{\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}ds \le -\int_T^t \rho(s)q(s)ds + \frac{a_2}{4k}\int_T^t \rho(s)\left(C_1 r(s)p^2(s) + \frac{h^2(s)}{a_1^2 C_0 r(s)} \right)ds$$

Thus,

$$\int_T^t \rho(s)\left[q(s) - k_1 r(s)p^2(s) - k_2\frac{h^2(s)}{r(s)} \right]ds \le -\int_T^t \frac{\rho(s)\left(\omega(s)/\rho(s)\right)^{\bullet}}{\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}ds \qquad (1-4)$$

Since $\rho(t)$ is a decreasing function and by the Bonnet's theorem, we see that for each $t \ge T$, there exists $a_t \in [T,t]$ such that

$$-\int_T^t \frac{\rho(s)\left(\omega(s)/\rho(s)\right)^{\bullet}}{\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}ds = -\rho(T)\int_T^{a_t} \frac{\left(\omega(s)/\rho(s)\right)^{\bullet}}{\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}ds \qquad (1\text{-}5)$$

From inequality (1-5) in inequality (1-4), the condition (2) and taking the limit superior on both sides, we obtain

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t \rho(s)\left[q(s) - k_1 r(s)p^2(s) - k_2\frac{h^2(s)}{r(s)} \right]ds \le -\rho(T)\limsup_{t\to\infty}\int_T^{a_t} \frac{\left(\omega(s)/\rho(s)\right)^{\bullet}}{\Phi\left(1,\omega(s)/\rho(s)\right)}ds$$

$$\le -\rho(T)\limsup_{t\to\infty}\int_{\omega(T)/\rho(T)}^{\omega(a_t)/\rho(a_t)} \frac{du}{\Phi\left(1,u\right)}$$

$$\le -\rho(T)\limsup_{t\to\infty}\left[-\int_0^{\omega(T)/\rho(T)} \frac{du}{\Phi\left(1,u\right)} + \int_0^{\omega(a_t)/\rho(a_t)} \frac{du}{\Phi\left(1,u\right)} \right]$$

$$\le \rho(T)\limsup_{t\to\infty}\left(G\left(\frac{\omega(T)}{\rho(T)}\right) + B^* \right) < \infty,$$

as $t \to \infty$, which contradicts to the condition (6). Hence the proof is completed.

Example2.2:

Consider the following differential equation

$$\left(\frac{(t^5+1)(x^4(t)+4)}{2(x^4(t)+3)}\dot{x}(t)\right)^{\bullet}+\sqrt{t}\,\dot{x}(t)+\left(\frac{t^5+4t^5\cos t}{t^5+1}\right)\left(x^9(t)+\frac{x^{27}(t)}{x^{18}(t)+\left(\frac{(t^5+1)(x^4(t)+4)}{2(x^4(t)+3)}\dot{x}(t)\right)^2}\right)=\frac{2t^5x^9(t)\sin(\dot{x}(t))}{\left(t^{10}+t^5\right)},t>0$$

Here $r(t)=\frac{1}{2}(t^5+1),\ h(t)=\sqrt{t},\ q(t)=\frac{t^5+4t^5\cos t}{t^5+1},\ g(x)=x^9,\ \Phi(u,v)=u+\frac{u^3}{u^2+v^2},$

$1\le\Psi(x)=\frac{x^4(t)+4}{x^4(t)+3}\le\frac{4}{3}\ for all\ x\in R$ and $\frac{H(t,x(t),\dot{x}(t))}{g(x(t))}=\frac{2t^5\sin(\dot{x}(t))}{\left(t^{10}+t^5\right)}\le\frac{2t^5}{\left(t^{10}+t^5\right)}=p(t)$ for all $t>0 and\ x\neq 0.$ Let $\rho(t)=\frac{t^5+1}{t^5},\ \dot{\rho}(t)=-\frac{5}{t^6}\ for all\ t>0$ and such that

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t\rho(s)\left[q(s)-k_1r(s)p^2(s)-k_2\frac{h^2(s)}{r(s)}\right]ds=\limsup_{t\to\infty}\int_T^t\frac{s^5+1}{s^5}\left[\frac{s^5+4s^5\cos s}{s^5+1}-\left(\frac{2k_1}{s^5+1}\right)-\left(\frac{2k_2s}{s^5+1}\right)\right]ds$$
$$=\infty.$$

We get all conditions ofTheorem2.2 are satisfied and hence every solution of the given equation is oscillatory. The numerical solutions of the given differential equation are found out using the Runge Kutta method of fourth order (RK4).

We have

$$\ddot{x}(t)=f(t,x(t),\dot{x}(t))=x^9(t)\sin(\dot{x}(t))-2.49(x^9(t)+\frac{x^{27}(t)}{x^{18}(t)+\dot{x}^2(t)})$$

with initial conditions $x(1)=0.5,\ \dot{x}(1)=1$ on the chosen interval $[1,100]$, the functions $\Psi(x)\equiv 1\ and\ h(t)\equiv 0$, finding values of the functions *r, q, f* where we consider $H(t,x,\dot{x})=f(t)l(x,\dot{x})$ at t=1, n=500 and h=0.198.

k	t_k	$x(t_k)$
1	1	0.5
2	1.98	0.6978
3	1.396	0.8916
.	.	.
.	.	.
10	2.782	-0.2024
11	2.98	-0.4413
12	3.178	-0.6799
.	.	.
.	.	.
20	4.762	0.0143
21	4.96	0.2105
22	5.158	0.4067
.	.	.
.	.	.
32	7.138	-0.2168
33	7.336	-0.4375
34	7.534	-0.658

Table 2: Numerical Solution of ODE 2

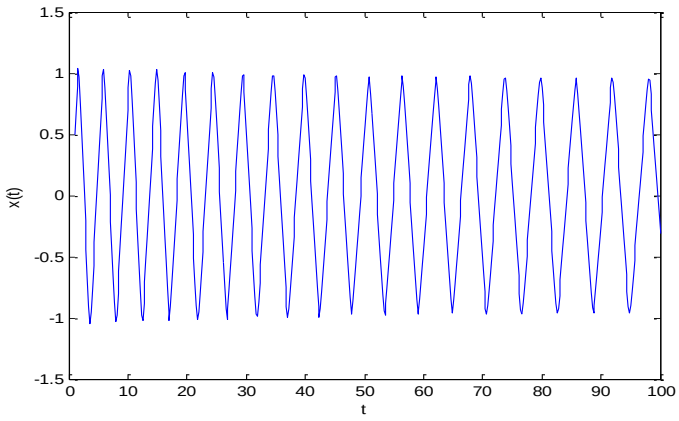

Figure2: Solution Curve of ODE 2

Theorem 2.3: Suppose, in addition to the conditions (1) and (4) hold that

(8) $$\int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} \frac{\Psi(u)du}{g(u)} < \infty \quad for\ all\ \varepsilon > 0.$$

Assume that there exist a differentiable function $\rho : [t_0, \infty) \to (0, \infty)$ such that $\dot{\rho} \geq 0, (\rho r)^{\bullet} \leq 0$ and

(9) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left(\frac{\dot{\rho}^{2}(u)r(u)}{\rho(u)}+\frac{\rho(u)h^{2}(u)}{a_2^{2}r(u)}\right)duds<\infty,$$

(10) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\rho(u)\left[C_0q(u)-p(u)\right]duds=\infty.$$

Then, every solution of equation (1) is oscillatory.

Proof: Without loss of generality, we assume that there exists a solution $x(t)$ of equation (1) such that $x(t)>0$ on $[T,\infty)$ for some $T\geq t_0\geq 0$. We define the function $\omega(t)$ as

$$\omega(t)=\frac{\rho(t)r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t)}{g(x(t))}\quad ,t\geq T$$

Thus for every $t\geq T$ and by equation (1) and condition (1), we obtain

$$\dot{\omega}(t)\leq\rho(t)p(t)-\frac{h(t)}{a_2r(t)}\omega(t)-\rho(t)q(t)\Phi(1,v(t))+\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\omega(t)-\frac{k}{a_2\rho(t)r(t)}\omega^{2}(t)$$

where, $v(t)=\omega(t)\big/\rho(t)$.

Since $\Phi(1,v(t))>0$ then, there exists C_0 such that $\Phi(1,v(t))\geq C_0$ $for\,all\,v\in R_+$ and integrate the last inequality from T to t we have

$$\omega(t)\leq\omega(T)-\int_T^t\rho(s)\left(C_0q(s)-p(s)\right)ds-\int_T^t\left[\frac{k}{a_2\rho(s)r(s)}\omega^{2}(s)-\left(\frac{\dot{\rho}(s)}{\rho(s)}-\frac{h(s)}{a_2r(s)}\right)\omega(s)\right]ds$$

Then, for $t\geq T$, and by the condition (4), we have

$$\frac{\rho(t)r(t)\Psi(x(t))\dot{x}(t)}{g(x(t))}\leq\omega(T)-\int_T^t\rho(s)\left(C_0q(s)-p(s)\right)ds+\frac{a_2}{4k}\int_T^t\rho(s)r(s)\left(\frac{\dot{\rho}(s)}{\rho(s)}-\frac{h(s)}{a_2r(s)}\right)^{2}ds$$

$$\leq\omega(T)-\int_T^t\rho(s)\left(C_0q(s)-p(s)\right)ds+\frac{a_2}{4k}\int_T^t\left(\frac{\dot{\rho}^{2}(s)r(s)}{\rho(s)}+\frac{\rho(s)h^{2}(s)}{a_2^{2}r(s)}\right)ds$$

Integrate the last inequality from T to t, we have

$$\int_T^t\frac{\rho(s)r(s)\Psi(x(s))\dot{x}(s)}{g(x(s))}ds\leq\omega(T)(t-T)-\int_T^t\int_T^s\rho(u)\left(C_0q(u)-p(u)\right)duds$$

$$+\frac{a_2}{4k}\int_T^t\int_T^s\left(\frac{\dot{\rho}^{2}(u)r(u)}{\rho(u)}+\frac{\rho(u)h^{2}(u)}{a_2^{2}r(u)}\right)duds\qquad(1-6)$$

Since $(\rho(t)r(t))$ is a non-increasing function and by the Bonnet's theorem, we see that for each $t\geq T$, there exists $\beta_t\in[T,t]$ such that

$$\int_T^t \frac{\rho(s)r(s)\Psi(x(s))\dot{x}(s)}{g(x(s))}ds = \rho(T)r(T)\int_T^{\beta_t}\frac{\Psi(x(s))\dot{x}(s)}{g(x(s))}ds = \rho(T)r(T)\int_{x(T)}^{x(\beta_t)}\frac{\Psi(u)du}{g(u)}$$

Since $\rho(t)r(t) > 0$ and the condition (8), we have

$$\int_T^t \rho(s)r(s)\frac{\Psi(x(s))\dot{x}(s)}{g(x(s))}ds \geq A_3 \text{ where } A_3 = \inf \rho(T)r(T)\int_{x(T_2)}^{x(\beta_t)}\frac{\Psi(u)du}{g(u)}$$

Thus, the inequality (1-6) becomes

$$\int_T^t\int_T^s \rho(u)\big(C_0q(u)-p(u)\big)duds \leq \omega(T)(t-T) - A_3 + \frac{a_2}{4k}\int_T^t\int_T^s\left(\frac{\dot{\rho}^2(u)r(u)}{\rho(u)} + \frac{\rho(u)h^2(u)}{a_2^2 r(u)}\right)duds$$

Dividing the last inequality by t, taking the limit superior as $t\to\infty$ and the condition (9), we obtain

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_T^t\int_T^s \rho(u)\big(C_0q(u)-p(u)\big)duds \leq \limsup_{t\to\infty}\omega(T)\left(1-\frac{(T+A_3)}{t}\right)$$

$$+\frac{a_2}{4k}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_T^t\int_T^s\left(\frac{\dot{\rho}^2(u)r(u)}{\rho(u)} + \frac{\rho(u)h^2(u)}{a_2^2 r(u)}\right)duds < \infty,$$

which contradicts to the condition **(10)**. Hence, the proof is completed.

Example 2.3: Consider the differential equation

$$\left(\frac{\left(x^2(t)+2\right)}{t^6\left(x^2(t)+1\right)}\dot{x}(t)\right)^{\bullet} + \frac{\dot{x}(t)}{t^9} + t^3\left(x^5(t) + \frac{x^{15}(t)}{x^{10}(t)+\left(\left(x^2(t)+2\right)\dot{x}(t)\Big/ t^6\left(x^2(t)+2\right)\right)^2}\right) = \frac{x^5(t)\sin(\dot{x}(t))}{t^{10}}, t>0$$

Here $r(t) = \frac{1}{t^6} > 0,\ h(t) = \frac{1}{t^9}\ \ q(t) = t^3,$ $g(x) = x^9, \Phi(u,v) = u + \frac{u^3}{u^2+v^2},$

$$H(t,x(t),\dot{x}(t)) = \frac{x^5(t)\sin(\dot{x}(t))}{t^{10}},\ \frac{H(t,x(t),\dot{x}(t))}{g(x(t))} = \frac{\sin(\dot{x}(t))}{t^{10}} \leq \frac{1}{t^{10}} = p(t)\ \ for\, all\, t>0\ and\ x\neq 0.$$

$$\Psi(x) = \frac{x^2(t)+2}{x^2(t)+1} > 0\, and\ \ 1 \leq \Psi(x) = \frac{x^2(t)+2}{x^2(t)+1} = 1 + \frac{1}{x^2(t)+1} \leq 2\ \ for\, all\, x\in R$$ and

$$0 < \int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty}\frac{\Psi(x)dx}{g(x)} \leq \int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty}\frac{2dx}{x^5} = \frac{1}{2\varepsilon^4} < \infty\ \ for\, all\ \varepsilon > 0.$$

Taking $\rho(t) = t^4 \geq 0\ \ for\ t>0,\ \dot{\rho}(t) = 4t^3 > 0\ and\ \left(\rho(t)r(t)\right)^{\bullet} = -\frac{2}{t} \leq 0\ for\, all\, t>0.$

(1) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left(\frac{\dot{\rho}(u)r(u)}{\rho(u)}+\frac{\rho(u)h^2(u)}{a_2^2 r(u)}\right)duds=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left(\frac{16}{u^4}+\frac{1}{u^8}\right)duds$$

$$=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left(-\frac{16}{3s^3}-\frac{1}{7s^7}+\left(\frac{16}{3t_0^3}+\frac{1}{7t_0^7}\right)\right)ds<\infty.$$

(2) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\rho(u)\left(C_0q(u)-p(u)\right)du\,ds=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}u^4\left(C_0u^3-\frac{1}{u^{10}}\right)duds$$

$$=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left(C_0u^7-\frac{1}{u^6}\right)duds=\infty.$$

It follows from Theorem2.3 that the given equation is oscillatory. The numerical solutions of the given differential equation are found out using the Runge Kutta method of fourth order (RK4). We have

$$\ddot{x}(t)=f(t,x(t),\dot{x}(t))=x^5(t)\sin(\dot{x}(t))-(x^5(t)+\frac{x^{15}(t)}{x^{10}(t)+\dot{x}^2(t)})$$

with initial conditions $x(1)=0.5,\dot{x}(1)=1$ on the chosen interval $[1,100]$, the functions $\Psi(x)\equiv 1\ and\ h(t)\equiv 0$, finding values of the functions *r*, *q*, *f* where we consider $H(t,x,\dot{x})=f(t)l(x,\dot{x})$ at *t*=1, n=500 and h=0.198.

k	t_k	$x(t_k)$
1	1	0.5
2	1.98	0.6978
3	1.396	0.894
.	.	.
.	.	.
11	2.98	-0.2872
12	3.178	-0.595
13	3.376	-0.8943
.	.	.
.	.	.
22	5.158	0.0629
23	5.356	0.2599
24	5.554	0.4568
.	.	.
.	.	.
34	7.534	-0.2111
35	7.732	-0.5174
36	7.93	-0.82

Table 3: Numerical Solution of ODE 3

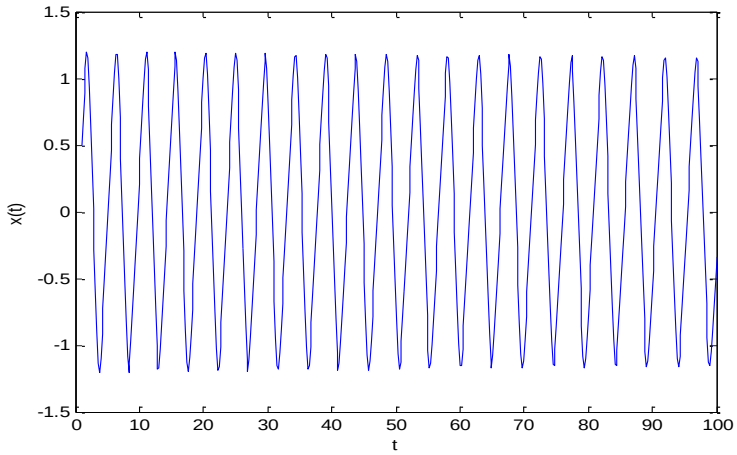

Figure3: Solution Curve of ODE 3

Remark2.2: If $(i)\ r(t) \equiv 1.(ii)\ \Phi\big(g(x(t)), r(t)\Psi(x)\dot{x}(t)\big) = \Phi(x(t), \dot{x}(t))$ and $(iii)\ \mathrm{H}(t, x(t), \dot{x}(t)) \equiv 0$ then Theorem 2.2 and Theorem 2.3 extend results of Bihari [3], Kartsatos [10] and Saad et al. [14]. All results of Bihari [3], Kartsatos[10] and Saad et al. [14] can't be applied to the given equation in Example2.2 and Example2.3.

References

[1] F. V. Atkinson, On second order nonlinear oscillations. Pacific. J. Math. 5 (1955), p. 643-647.
[2] X. Beqiri and E. Koci, New Oscillation and Non-oscillation Criteria For Second Order Nonlinear Differential Equations, Int. J. of Pur. and Appl. Math. 93(2)(2014), 155-163.
[3] I. Bihari, An oscillation theorem concerning the half linear differential equation of the second order, Magyar Tud. Akad.Mat. Kutato Int.Kozl. 8 (1963), p.275-280.
[4] E. M. Elabbasy, On the oscillation of nonlinear second order differential equations, Pan American Mathematical J. 4(1996), 69-84.
[5] W. B. Fite, Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations, Trans. Amer. Math. Soc.19 (1918), p. 341-352.
[6] S. R. Grace, Oscillation theorems for nonlinear differential equations of second order, J. Math. Anal. Appl. 171 (1992), p. 220-241.
[7] S. R. Grace and B. S. Lalli, Oscillation theorems for certain second perturbed differential equations, J. Math. Anal. Appl. 77 (1980), p. 205-214.
[8] J. R. Greaf, S. M. Rankin and P. W. Spikes, Oscillation theorems for perturbed nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl. 65 (1978), p. 375-390.
[9] I.V. Kamenev, Integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order, Math. Zametki 23 (1978), p. 249-251.
[10] A. G. Kartsatos, On oscillations of nonlinear equations of second order, J. Math. Anal. Appl. 24 (1968), p. 665-668.
[11] J. V. Manojlovic, Oscillation criteria of second order sublinear differential equations, Computers and Math. Applic. 39(2000), p. 161-172.

[12] M. J. Saad, N. Kumaresan and Kuru Ratnavelu, Oscillation of Second Order Nonlinear Ordinary Differential Equation with Alternating Coefficients, Commu. in Compu. and Info. Sci. 283(2012), 367-373.

[13] M. J. Saad, Ambarka A. Salhin and Fatima N. Ahmed, Oscillatory Behaviour Of second Order Nonlinear Differential Equations. International Journal of Multidisciplinary Sciences and Advanced Technology. Issue (1) (2021), p565-571.

[14] M. J. Saad, N. Kumaresan and Kuru Ratnavelu, Oscillation Criterion for Second Order Nonlinear Differential Equations, Journal of Educational.(20)(2022), p. 302-314.

[15] R. Rani and S. Kavitha, Oscillation Criteria Of Second Order Nonlinear Interval Forced Differential Equations, IJARIIE, 3(4)(2017),374-382.

[16] A. Tiryaki and D. Cakmak, Integral averages and oscillation criteria of second order nonlinear differential equations, Computers and Math. Applic. 47(2004), 1495-1506.

[17] P. Waltman, An oscillation criterion for a nonlinear second order equation, J. Math. Anal. Appl. 10 (1965), p. 439-441.

[18] A. Wintner, A criterion of oscillatory stability, Quart. Appl. Math. 7 (1949), p. 115-117.

[19] C. C. Yeh, Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations with damped term, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982), p. 397-402.

مجلة التربوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3

معامل التأثير العربي 2.17 لسنة 2024
العدد 26 يناير 2025

الفهـــرس

ر.ت	عنوان البحث	اسم الباحث	الصفحة
1	Database Security Issues and Challenges in Cloud Computing (Review)	Hajer Mohammed farina Salem Husein Ali Almadhun Aimen M. Rmis Ramadan Faraj Swese	1-9
2	جماليات الاقنعة والرموز الافريقية	حسين ميلاد أبوشعالة	10-23
3	الإمكانيات المائية في منطقة مسلاته وأهم المشكلات التي تواجه قطاع المياه فيها	رجعة سعيد محمد الجنقاوي عائشة مصطفى المقريف الهام محمد علي أبوستالة	24-35
4	تأثير الذكاء الاصطناعي في تقليل تكلفة البناء الحديث	رضا الصادق الرميح عصام امحمد الرثيمي عبدالرحمن عبدالسلام المنفوخ سالم مصطفى الديب	36-42
5	الخطاب الموجه إلى الرسول صلى الله عليه وسلم دراسة نحوية وصرفية وبلاغية لآيات مختارة من القرآن الكريم	زهرة أحمد يحيى نورية عمران أبو ناجي	43-60
6	الأصول الدعوية للتصوف وأثرها في تقويم السلوك	سالم مفتاح إبراهيم بعوه إسماعيل عاشور عبدالله بن صليل	61-70
7	دراسة السعة الحرارية لنظام فيرمغناطيسي مختلط من الرتبة(5/2 و 7/2) باستخدام نظرية المجال المتوسط	محمد يوسف اقنيبر سعاد علي محمد الشكيوي	71-82
8	بعض الأسباب الاجتماعية المؤدية للطلاق في المجتمع الليبي "دراسة ميدانية بمدينة الخمس"	فتول سالم الله عبد سعيدة	83-96
9	تنمية المهارات الحسابية باستخدام لعبة تعليمية إلكترونية للصف الأول الابتدائي (تطبيق فلاش للعمليات الحسابية أنموذجًا)	عائشة حسن حويل	97-104
10	قوة النص في ارتباطه بالمعنى في قوله تعالى:﴿وخضتم كالذي خاضوا﴾ أنموذجًا دراسة تحليلية وصفيّة	عبد الرحمن بشير الصابري إبراهيم عبد الله سويسي أبوبكر أحمد الصغير سالم علي سالم شخطور	105-112
11	مفهوم الدولة عند هيجل	عبد المنعم امحمد سالم	113-121
12	Beyond the Screen: Challenges Faced by English as Second Language (ESL) Tutors in Teaching Online ESL to Koreans	عبد المهيمن الحصان	122-131
13	التنمر المدرسي وعلاقته ببعض المتغيرات لدى طلاب المرحلة الثانوية: دراسة إمبيريقية	عثمان علي أميمن	132-154
14	اختلاف النحاة في إعراب بعض آيات من سورة البقرة وأثره على المعنى	عبد المولى محمد الدبار	155-163
15	تدبّر وبيان، في لفظة اقرأ في القرآن	علي عبد الرحمن إبراهيم الفيتوري	164-168
16	Enhancing Critical Thinking and Learning Outcomes Through Flipped Classroom Strategy in Biology Education	Hind Mohammed Aboughuffah Fenny Roshayanti Siti Patonaha	169-172
17	الرؤية السّردية في رواية نزيف الحجر لإبراهيم الكوني	علي سلامة العربي نوارة صالح موسى عمر حسين أبوغرارة	173-179
18	مفهوم الذات وعلاقته بالتوافق النفسي لدى طلبة التعليم الثانوي	فتحية على جعفر	180-187
19	الأسس الشرعية لدور الشباب في ترسيخ ثقافة التسامح لتحقيق الأمن والسلم في المجتمعات	فرج الصديق علي إشميلة	188-193
20	علاقة ممارسة النشاط البدني الرياضي باضطرابات الاكل لدى مريضات السكري ببعض مراكز المرأة بطرابلس	لطفية علي الكيب ربيعة المبروك سويسي	194-205
21	تحديد العوامل المؤثرة في نسبة الأكسجين لمصاب فيروس كورونا (كوفيد 19) باستخدام نموذج الانحدار الخطي المتعدد	مروة الهادي أحمد الصاري هديل عبد الفتاح أبو بكر حمير أميرة صالح مفتاح التريكي	206-213
22	البلاغة بين الأصالة والتأثر (الترجمة) وعلاقتها بتطور الفكر البلاغي	ملاك حسن القاضي	214-221
23	دور القيادة الالكترونية في تحسين أداء العاملين(دراسة ميدانية علي العاملين بصندوق الضمان الاجتماعي فرع سوف الجين- بني وليد-ليبيا)	ميلاد سالم المختار مغراف	222-232

24	استخدام الحوسبة السحابية لتطوير خدمات المعلومات في المكتبات الجامعية	خيرية عبد السلام عامر ناصر مختار كصارة	233-243
25	الاختبارات التحصيلية وأهميتها في العملية التعليمية	نجاة محمد المرابط نجاة صالح يحي	244-250
26	Sing, Learn and Grow; The benefits of English Educational Songs in the Nursery stage	Najah Abduallah Albelazi Milad Ali Abdoalsmee	251-260
27	دور مواقع التواصل الاجتماعي في التغييرات السياسية في المنطقة العربية	نعيمة رمضان محمد أبو ناجي	261-275
28	Detections of The Presence of Aflatoxin Secreted Fungi in Some Foods Traded in The Markets of The City of Al Khums, Libya	Zuhra Bashir Trabalsiy Nuri Salem Alnaass Mabruka Hadya Abubaira	276-283
29	مستوى الوعي البيئي لدى أساتذة وطلاب كلية الآداب والعلوم قصر الأخيار بظاهرة الاحتباس الحراري	حنان عيسى الراشدي نادية عبدالله التواتي الحرابي وفاء عتيق عتيق	284-300
30	الغزل الأنثوي " عُلية العباسية أنموذجاً"	عطية صالح علي الربيقي	301-312
31	Foreign Language Planning: A Case Study of Program Planning at the Faculty of Languages and Translation at Misrata University	Abdalkareem Abdalsalam Benmustafa Najah Abdalhamid Aljoroushi	313-318
32	The Effectiveness of Implementing Language-Based Approaches to Enhance EFL Students' Literary Competence: A Case Study of Teachers at the Faculty of Education, Elmergib University, Libya	Abdussalam Ali Faraj Mousa Hamza Ali Zagloom	319-333
33	Design a model for Teaching Management Information Security System in various faculties of Libyan Universities	Ali Ali Milad Mohammed Abuojaylah Albarki Aimen Abdalsalam Kleeb	334-339
34	Dimension Functions On Topological Spaces	Ali S R Elfard	340-350
35	Calculate Petrophysics Properties for Gir Formation (Facha Member) in Dahab Field- NC74, Sirte Basin	Abduladiem Yousef	351-358
36	Certain Subclasses of Analytic Functions Defined By Using New Integral Operator	Ebtisam. A. Eljamal Huda Ali Aldweby Entesar .J. Sabra	359-362
37	Study efficiency of biosorbent materials (pomegranate and fig leaves) in removing of Zinc from aqueous solution	Fathi Abuojaylah Abo-Aeshah	363-367
38	Inclusion Relations For K-Uniformly Starlike Functions Defined By Linear Operator	Fatma A. Alusta Milad E. Drbuk	368-378
39	Study of Pantoprazole and Omeprazole to Effect in the Treatment of Acute Gastric Ulcers and Reflux Esophagitis	Ebtehal El-Ghezlani Fatma Kahel	379-393
40	الألعاب الالكترونية وأثرها على ممارسة السلوك العدواني لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية من وجه نظر الأمهات المعلمات. (دراسة ميدانية على بعض المدارس الابتدائية بالفرع الغربي بمدينة زليتن)	ناجي سالم عبد السلام السفاقسي محمود محمد محمود زربيط	394-400
41	Mineral Precipitation Aspects within Sidi-Essaid Formation (Upper Cretaceous) Located at Sidi-Bujdaria Village, Wadi Gherim, Ghanema, NW Libya.(Part-1)	Ismail Elforjani Shushan Salah Eldin M. Elgarmadi Emad Eldin A. Dagdag	401-415
42	The Difficulties Facing Undergraduate Students in Writing Research Graduation Projects. Students' / Teachers' Perceptions and Attitudes	Khiri Saad Elkut	416-426
43	Proverbes français et leur traduction en arabe au niveau grammatical et sémantique.	Moamer Mohamed Attallah	427-438
44	استخدام نظام تنبيه وتسجيل المخاطر في المصرف الاسلامي الليبي (فرع الخمس)	Salaheddin Salem A.Elheshk Najla Mokhtar Elmusrati Abdalftah ali m. Abuaysha	439-451
45	أثر اللون في الشعر العربي (بشار بن برد أنموذجا)	محمد فتحي محمد قدقود	452-458
46	أثر المحددات المباشرة على الخصوبة في ليبيا للسنوات 2007،2014	أسماء إشتيوي العيان فاطمة علي التير سميرة عمر الدوفاني	459-470
47	أثر اللغة التركية في اللهجة الليبية	الصادق سالم حسن عبد الله	471-481

48	بعض آراء الأخفش النحوية في باب المرفوعات	الطاهر سالم العامري عائشة فرج القطاع سهام عادل القطاع	482-495
49	دقة المفردة القرآنية في الدلالة على الأحكام التشريعية (مفردات من آيات النكاح والحدود أنموذجاً) "دراسة فقهية مقاصدية"	الوليد سالم إبراهيم خالد	496-504
50	القصة الشعرية في شعر المعتمد بن عباد	أمنة جبريل سليمان المسلاتي	505-517
51	On Some Types of Dense Sets in Topological Spaces	Amna M. A. Ahmed	518-525
52	أثر استراتيجيات إدارة الأزمات الحديثة على الأداء الوظيفي من وجهة نظر القيادات الإدارية لشركة الأهلية للإسمنت المساهمة	أميرة عبدالله الطوير	526-540
53	أساليب المعاملة الوالدية ودورها في إحداث المرونة النفسية لدى الابناء	أميمة سعد اللافي فاطمة يوسف اخميرة	541-547
54	أسلوب تحليل الانحدار الخطي لدراسة أثر الحكومة المؤسسية على الحد من الفساد الاداري	إنتصار علي ارهيمة وفاء محمد محمد العبيد	548-561
55	دراسة إحصائية لتنبؤ بأعداد مرضى السكر باستخدام منهجية بوكس وجنكيز (دراسة تطبيقية)	إيمان حسين عبد الله علي بشير معلول حنان إبراهيم البكوش	562-571
56	تحليل معدلات ظاهرة البطالة في منطقة المرقب عن العامين (2013 – 2022م)	تهاني محمود عمر خرارزة	572-580
57	منهج الشيخ عبدالسلام أبو ناجي في بيان أدلة الأحكام من خلال كتابه أصول الفقه	جمال محمد الفطيسي	581-590
58	تحليل مطيافية التشتت الخلفي لراذرفورد لزراعة الفضة على كربيد السيليكون متعدد البلورات	حميدة على عمر ابوراس	591-593
59	أسباب ظاهرة التنمر المدرسي من وجهة نظر الأخصائي الاجتماعي، والمرشد النفسي في بعض مدارس التعليم الأساسي	حنان سعيد علي سعيد عائشة سالم اطبيرجة عفاف محمد بالحاج	594-606
60	"إذَنْ" في اللغة العربية	حواء بشير عمر بالنور	607-611
61	العنف ضد المرأة من منظور نفسي	خيرية عمران كشيب	612-622
62	واقع التعليم الالكتروني في مؤسسات التعليم العالي بين (طموحات التفعيل - التحديات)	عبدالحميد مفتاح ابو النور حنان فرج ابو على	623-630
63	مفهوم السلطة السياسية عند ميكافيللي(دراسة تحليلية نقدية)	نور الدين سالم رحومه قريبع	631-638
64	دراسة التغيرات الوظيفية في كبد وكلى ذكور الارانب المعاملة بعقار الأيبوبروفين Ibuprofenومدى التأثير الوقائي المحتمل لزيت الزيتون Olive Oil	يونس مفتاح الزايدي وليد فرج نعيمات محمد اسماعيل ابوصلاح أحمد علي إبراهيم البكوش ابوبكر الشريف الشبيلي	639-650
65	ظاهرة البطالة في المجتمع الليبي ودور الخدمة الاجتماعية في التعامل معها	بنور ميلاد عمر العماري	651-659
66	أثر رأس المال البشري على ربحية المصارف التجارية دليل تجريبي من المصارف التجارية العاملة في الأردن	خالد محمد الشريف	660-669
67	في ترشيد الفكر ومحاربة التطرف الفكري دور الوسطية	عبدالحميد إبراهيم سلطان	670-680
68	المرونة المعرفية للمرشد التربوي ودورها في نجاح العملية التعليمية	مها المصري محمد أبورقيقة	681-693
69	Case Study: Investigating The Effect of Teaching Prewriting stage on Students' Writing Quality	عبدالخالق محمد الربيعي	694-706
70	الظروف التي تضاف إلى الجمل وجوباً "بناؤها واستعمالاتها"	زينب محمد العجيل أبوراس	708-714
71	Considering the impact of peer observation on teacher's development	سناء امحمد السائح معتوق	715-722
72	التعريف بالطفيليات التي تصيب أسماك الهامور الداكنة (Epinephelus marginatus) المصطادة من شواطئ مدينة الخمس - ليبيا	عطية رمضان الكيلاني عبدالسلام صالح أبوسديل ميلود الصيد الشافعي	723-729
73	"التوافق بين شيخ الإسلام ابن تيمية ومحققي الأحناف في المسائل المتعلقة بالإيمان بالله وتوحيد الألوهية: جمعا ودراسة"	مختار حسين حسن محمد حسن ماخذي	730-742
74	حكم الاتجار بماء زمزم واستخدامها في إزالة النجاسة وما يتعلق بها من آداب	سليمان امحمد بن عمر	743-758

759-771	Ragb O. M. Saleh	Simulation and Comparison of Control Messages Effect on AODV and DSR Protocols in Mobile Ad-hoc Networks	75
772-777	Ghayth M. Ali Ilyas A. Salem Fathalla S. Othman Abdulati Othman Aboukirra Ayiman H. Abusaediyah Ashraf Amoura	INVESTIGATING THE EFFECT OF ALKALINE TREATMENT ON THE PHYSICAL CHARACTERISTICS OF HAY-EPOXY COMPOSITES	76
778-785	نهلة أحمد فرج محمود أحمد أدم عبد الكريم عيسى	تحسين أداء الشبكة المحلية (LAN) بكلية العلوم صبراتة باستخدام الشبكة المحلية الظاهرية (VLAN)	77
786-791	Reem Amhemmed Masoud	Evaluation of the efficacy of leave Extract of Ziziphus spina-Christi against three Bacterial species	78
792-799	Ruwida M. Kamour Zaema A. El Baroudi Taha H.Elsheredi	Saffron Adulteration: Simple Methods for Identification of Fake Saffron	79
800-813	فريال فتحي محمد الصياح	مدى ممارسة معلمي القسم الادبي للكفايات التعليمية الضرورية لتدريس مادة علم النفس العام في المرحلة الثانوية لبعض مدارس تعليم الساحل الغربي	80
814-824	سعاد صالح بلقاسم ايناس محمد ميلاد	استخدام مواقع التواصل الاجتماعي في العملية التعليمية ومدي فاعليتها لدى الطلبة (دراسة ميدانية على طلبة كلية تقنية المعلومات الخُمس /بلدية الخُمس (الواتساب نموذجا)	81
825-832	ذكريات عبد المولى سالم العيساوي	حل مشكلة التخصيص الضبابي بطريقة التصنيف للأعداد الضبابية الرباعية	82
833-851	عباس رجب عبدالرحيم	النظام البازيليكي للكنائس البيزنطية دراسة أثرية تطبيقية للكنيسة الشرقية بقورينا "شحات"	83
852-860	محمد نجم الهدى	المكتبات الرقمية ودورها في نشر علوم السنة النبوية: دراسة تحليلية	84
861-875	Munera Shaili Asaki	Using electronic resource mobilization to develop mathematical thinking skills among higher institute students.	85
876-881	Hend ALkhamaesi ALmabrouk ALhireereeq	Evaluation of some Chemical components of the ground water in four regions of Tourist area	86
882-905	مبروكة سعد أحمد علي	المخاطر العقدية في الإعلام الغربي وإهانته للمقدسات الإسلامية وموقف الإسلام من ذلك	87
906-924	صالح رجب أبوغفة	دراسة اضطرابات النطق وعلاقتها بالخجل الاجتماعي لدى الأطفال ودور الاختصاصي الاجتماعي في الحد منها (دراسة ميدانية بمدرسة الصم والبكم وضعاف السمع بمدينة زليتن)	88
925-935	نور الهدى نوري مجير	عناية أهل الأَنْدَلُس بالنظافة وصحة البيئة	89
936-950	عبد الرؤوف محمد عبد الساتر الذرعاني	كان وأخواتها في الشعر العربي (ديوان المعتمد بن عباد أنموذجا)	90
952-957	حنان عبد السلام علي سليم سعاد إبراهيم الهرم	توظيف الأنظمة الالكترونية في المجال الصحي (إنشاء نظام الكتروني لأحد صيدليات مدينة زليتن)	91
958-977	محمد زكريا	" نماذج من أحاديث كتاب الفِرْدَوْسِ بِمَأْثُورِ الخِطَابِ " لِأَبِي شُجَاعٍ، شِيْرُوْيَه بْنُ شَهْرَدَار الدَّيْلَمِي (445-509هـ)، تحقيقا ودراسة"	92
978-989	نورية محمد الشريف	ظاهرة تراكم وتكدس النفايات الصلبة (القمامة) في منطقة سوق الخميس / الخمس	93
990-1004	Ahmid Emhemed Daw Altomi Zahia Kalifa Daw Musdeq	Vitamin D deficiency and its effect on human health in the city of Al-Jamil	94
1005-1014	محمود محمد رحومة الهوش	حصة التربية البدنية وعلاقتها بالتحصيل الدراسي لدى تلاميذ المرحلة النهائية للتعليم الثانوي ببلدية العجيلات	95
1015-1031	عبد المنعم منصور الحر	التهديدات الإيرانية وتأثيرها على الأمن القومي السعودي "دراسة تحليلية للنزاع في اليمن خلال الفترة من 2011 إلى 2014"	96
1032-1040	Fuzi Elkut Sabri M. Shalbi	A Review of mAs Optimization Strategies in CT Imaging: Maximizing Quality and Minimizing Dose simultaneously	97
1041-1049	Mostafa Omar Sharif Adel Omar Aboudabous	An overview of fish muscle physiology, omics, environmental, and nutritional strategies for enhanced aquaculture	98
1050-1058	أنيس محمد عبد الهادي الصل	دلالات صدق وثبات مقياس الطفل التوحدي على البيئة المحلية لمدينة مصراتة_ ليبيا للأعمار من (3 _ 10) سنوات	99

100	The Role and Effect of AI in Translation	Abdaladeem Mohammad Hdidan	1059-1067
101	التعزير في الشريعة الإسلامية وتطبيقاته في القانون الجنائي المعاصر: دراسة تطبيقية على القانون الليبي	علي معتوق علي صالح	1068-1077
102	Antagonistic Activity of Rhizobium sp Against some Human Pathogenic Microorganisms	Hana Wanis Elfallah Hnady Hisham Alsiywi	1078-1083
103	Determination of Arsenic and Cadmium in the Seawater Samples using Atomic Absorption Spectrometry	Fuzi Mohamed Fartas Ramdan Ali Aldomani Ahmed Mohammed Mawloud Alqeeb Galal M. Zaiad	1084-1089
104	" التحديات التي تواجه الأندية الرياضية بمدينة الخمس في تشكيل فرق كرة اليد"	عبد السلام صالح علي انبيص مصعب مفتاح محمد الشريف	1090-1096
105	نظرية النقطة الثابتة في الفضاءات المترية الجزئية الضبابية	Fariha jumaa amer Entesar omer alarabi Entesar juma milad A.S.deeb Z.A.Abusutash	1097-1101
106	مستوى الرفاهية الروحية عند أمهات الطفل التوحدي بمدينة الخمس	عائدة سلامة السوداني العربي	1102-1109
107	استكشاف سلوك الامتزاز للصبغة الأنيونية (الكونغو الحمراء) على سطح مازة طبيعية (قشور الحلزون البري)	ليلى العماري محمد عريبات	1110-1121
108	النشاطات العلمية لأعضاء هيئة التدريس وأثرها على المسؤولية الاجتماعية لدى كلية العلوم بجامعة المرقب.	سليمة رمضان الكوت	1122-1139
109	دور حمض السالسليك في التخفيف من سمية ملح كلوريد الصوديوم في نباتي الشعير والقمح	عايدة سعد بدر سعاد محمد شكلول سعاد محمد السريتي غادة إسماعيل جعفر ميار جمعة جود	1140-1158
110	الزيادات ومواضعها في العربية	انتصار عبدالله ميلاد	1159-1174
111	Some Oscillation Criteria for a Class of Nonlinear Second Order Damped Differential Equations	M. J. Saad N. Kumaresan Kuru Ratnavelu	1175-1189
112	Exploring Vibration-Based Assessment Methods for Wind Turbine Rotor Blades: Simulations with Experimental Validation	Abdelnasser Abouhnik E.M Ashmila Ghalib R. Ibrahim Alsdeg A. Abohnik	1190-1202
113	The Effect Of High Doses Of Vitamin D3 In Presence Of Vitamin C On The Kidney Of Domestic Male Rabbits	Njia Mild A Rajab Aser Wedad Mohamed Omran Alkut Khayriya Mohammed Al Bakouri	1203-1210
الفهرس			1211