معامل التأثير العربي 2.17 العدد 27	مجـلة الـتربـوي Journal of Educational	

مجلة التربوي

مجلة علمية محكمة نصف سنوية تصدرعن

كلية التربية / الخمس

جامعة المرقب

العدد السابع والعشرون

يوليو 2025م

- المجلة ترحب بما يرد عليها من أبحاث وعلى استعداد لنشرها بعد التحكيم .
- المجلة تحترم كل الاحترام آراء المحكمين وتعمل بمقتضاها .
- كافة الآراء والأفكار المنشورة تعبر عن آراء أصحابها ولا تتحمل المجلة تبعاتها .
- يتحمل الباحث مسؤولية الأمانة العلمية وهو المسؤول عما ينشر له .
- البحوث المقدمة للنشر لا ترد لأصحابها نشرت أو لم تنشر .

ضوابط النشر:

يشترط في البحوث العلمية المقدمة للنشر أن يراعى فيها ما يأتي :

- أصول البحث العلمي وقواعده .
- ألا تكون المادة العلمية قد سبق نشرها أو كانت جزءا من رسالة علمية .
- يرفق بالبحث تزكية لغوية وفق أنموذج معد .
- تعدل البحوث المقبولة وتصحح وفق ما يراه المحكمون .
- التزام الباحث بالضوابط التي وضعتها المجلة من عدد الصفحات ، ونوع الخط ورقمه ، والفترات الزمنية الممنوحة للتعديل ، وما يستجد من ضوابط تضعها المجلة مستقبلا .

تنبيهات :

- للمجلة الحق في تعديل البحث أو طلب تعديله أو رفضه .
- يخضع البحث في النشر لأولويات المجلة وسياستها .
- البحوث المنشورة تعبر عن وجهة نظر أصحابها ، ولا تعبر عن وجهة نظر المجلة .

Information for authors

1- Authors of the articles being accepted are required to respect the regulations and the rules of the scientific research.

2- The research articles or manuscripts should be original and have not been published previously. Materials that are currently being considered by another journal or are a part of scientific dissertation are requested not to be submitted.

3- The research articles should be approved by a linguistic reviewer.

4- All research articles in the journal undergo rigorous peer review based on initial editor screening.

5- All authors are requested to follow the regulations of publication in the template paper prepared by the editorial board of the journal.

Attention

1- The editor reserves the right to make any necessary changes in the papers, or request the author to do so, or reject the paper submitted.

2- The research articles undergo to the policy of the editorial board regarding the priority of publication.

3- The published articles represent only the authors' viewpoints.

معامل التأثير العربي 2.17 لسنة 2024
مجـلة الـتــربـوي
Journal of Educational
العدد 27 ـــ يوليو 2025

استخدام نظرية جرين (Greens Theory) لدراسة العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي

آمنة عبد السلام يوسف بالحاج[1] – سوسن مصطفي سعيد[2]
قسم الرياضيات / كلية التربية-الخمس
a.a.belhaj@elmergib.edu.ly [1]
s.m.saeed@elmergib.edu.ly [2]

الملخص

يهدف هذا البحث الي كيفية استخدام نظرين جرين لدراسة العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي واعتمدت الباحثتان علي المنهج الوصفي التحليلي لبيان استخدام نظرية جرين في إيجاد العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي ولتحقيق هدف هذا البحث تم اعداد أسئلة بحثية وتم الإجابة عنها وفي ضوء نتائج البحث توصي الباحثتان بالاهتمام بالتطبيقات المختلفة للتكامل الثنائي والتكامل الخطي والتوسع بدراسة العلاقة بين التكامل الثنائي و التكامل الخطي باستخدام نظرية جرين نسبة لأهميته في الحياة من خلال تطبيقاته العلمية وتم تقديم بعض من المقترحات والتوصيات لهذا البحث

الكلمات المفتاحية: نظرية جرين – التكامل الخطي – التكامل الثنائي

المقدمة:

تعتبر الرياضيات بمثابة علما متسلسلا نلاحظه دائما يتجه للأمام، ويعد أيضا من العلوم التراكمية؛ لأن الحاضر والمستقبل فيه تجده يستند بصورة أساسية على الماضي وما قدمه العلماء من قبل، ويعتبر من العلوم عالية التجريد؛ لاعتماده على النظريات الهندسية والأرقام، إذ يتميز بالدقة والترتيب في عرض الأفكار والتدرج مما يوصلنا للتوضيح والتفسير الدقيق لكافة النتائج.

هذا وارتبطت الرياضيات في أذهان العلماء بمعان عديدة، فقد نظر إليها البعض على أنها عبارة عن مهارات في الحساب فقط، واعتبرها البعض أداة هامة تستخدم في حياتنا اليومية وفي المدارس والدراسات الأكاديمية، أما المختصون وصفوها على أنها دراسة عميقة للأنظمة التجريدية وهي دراسة تنمي طرق التفكير وتطورها.

ويعتبر التكامل هو أحد فروع الرياضيات الذي يتعامل مع معدلات التغير والحركة، وقد نشأ هذا العلم انطلاقاً من الرغبة في فهم الظواهر الفيزيائية المختلفة مثل مدارات الكواكب وآثار الجاذبية، وأدى نجاح حساب التكامل في صياغة القوانين الفيزيائية والتنبؤ بنتائجها إلى تطوير قسم جديد في الرياضيات يسمى التحليل، والذي يعتبر حساب التكامل جزءاً كبيراً منه.

وغالبا ما يعزى اكتشاف حساب التكامل إلى عالمين اثنين هما (اسحق نيوتن) و (جو تفريد لايبنيز) اللذان مهدا لأساسيات هذا العلم بشكل مستقل.

ومن خلال النظر إلى هذه الأهمية بالنسبة للتكامل في مجالات العلوم والهندسة باعتباره أداة عملية لا تقدر بثمن في التحليل الإضافي للقوانين الفيزيائية وفي التنبؤ بسلوك النظم الكهربائية والميكانيكية التي تحكمها هذه القوانين فقد قمنا بإجراء هذا البحث الذي تضمن ثلاثة فصول تم دراسة الإطار العام للبحث في الفصل الأول، ودراسة التكامل الخطي والثنائي وخصائص كل منهما ونظرية جرين في الفصل الثاني، أما الفصل الثالث فقد تم فيه عرض النتائج والتوصيات والمقترحات للبحث.

مشكلة البحث:

لخصت الباحثتان مشكلة البحث في الاتي:

1- وجود نقص في الدراسات العلمية التي تختص بدراسة العلاقات بين التكاملات المختلفة.
2- ملاحظة قلة استخدام نظرية جرين في مناهج الرياضيات المقررة لتوضيح التكاملات والعلاقات بينها.

مشكلة البحث:

تتمثل مشكلة البحث في السؤال الرئيسي التالي:

ما العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي باستخدام نظرية جرين؟

ويتفرع من هذا السؤال الأسئلة التالية:

1- ما هو التكامل الخطي؟
2- ما هو التكامل الثنائي؟
3- كيف يمكن أن نوضح العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي باستخدام نظرية جرين؟

أهداف البحث:

يسعى البحث الحالي إلى:

1- التعرف على التكامل الخطي وخواصه وطرق حله.
2- التعرف على التكامل الثنائي وخواصه وطرق حله.
3- التعرف على العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي بواسطة نظرية جرين.

أهمية البحث:

تتمثل أهمية البحث الحالي فيما يلي:

1- إمكانية حساب التكامل على منحنى.
2- إمكانية حساب المساحة المحصورة بين منحنيين.
3- بيان أهمية نظرية جرين لإيجاد قيمة التكامل الخطي حول منحنى مغلق في صورة تكامل ثنائي على المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى

منهج البحث:

لتحقيق أهداف هذا البحث والإجابة على أسئلته تم اتباع المنهج الوصفي التحليلي لبيان أساس نظرية جرين التي ساعدتنا في الوصول إلى معرفة العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي.

مصطلحات البحث:

1- التكامل الخطي:

يدعى أحيانا بتكامل المسار أو تكامل المنحنى يتم فيه حساب تكامل الدالة على منحنى مغلق أو مفتوح على منحنى.

2- التكامل الثنائي:

هو أحد أنواع التكامل المحدود الموسع ليشمل الدوال المعرفة في متغيرين.

3- نظرية جرين:

هي العلاقة التي تحول التكامل على منحنى مغلق إلى تكامل ثنائي على المساحة المحصورة داخل هذا المنحنى المغلق.

الدراسات سابقة:

دراسة (رقية وآخرون 2018).

تناولت هذه الدراسة التكامل الثنائي وبعض تطبيقاته وتوصلت إلى مجموعة من النتائج والتوصيات.

يمكن استخدام التكامل الثنائي لحساب قيمة التكامل لبعض الدوال الغير قابلة للتكامل واستنتاج بعض صيغ التكامل الثنائي للحجم والكتلة والمساحة وعزم القصور الذاتي.

العملية. والاهتمام بالتطبيقات المختلفة للتكامل الثنائي والتوسع بدراسة التكامل الثنائي نسبة لأهميته في الحياة من خلال تطبيقاته

دراسة (حنان وشيماء 2017).

تناولت هذه الدراسة دراسة العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي بواسطة نظرية جرين.

تناول هذا البحث مفهوم التكامل الخطي وخواصه وطرق حله والتكامل المحدود وبعض تطبيقاته والتكامل غير المحدود وبعض طرق حله، وكذلك التكامل الثنائي وبعض تطبيقاته، ونظري جرين وأمثلة عليها.

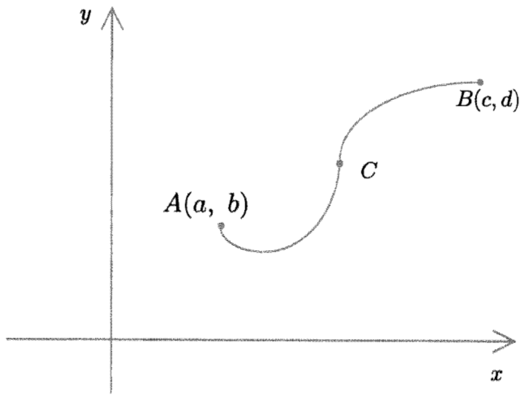
دراسة (رنا وآخرون 2019).

تناولت هذه الدراسة التكامل بصفة عامة والتكاملات المعتلة بصفة خاصة فتناولت هذه الدراسة مقدمة عن التكامل وتعريفه، وأنواع التكامل، ومن ثم تناول مفهوم التكامل المعتل وسبب علته.

(1.2) التكامل الخطي (التكامل على منحنى):

تعريف التكامل الخطي:

نفرض أن القوس C في المستوى XYيمتد من النقطة A(a،b) إلى النقطة B(c،d) كما هو موضح بالشكل (1.2):



شكل (1.2)

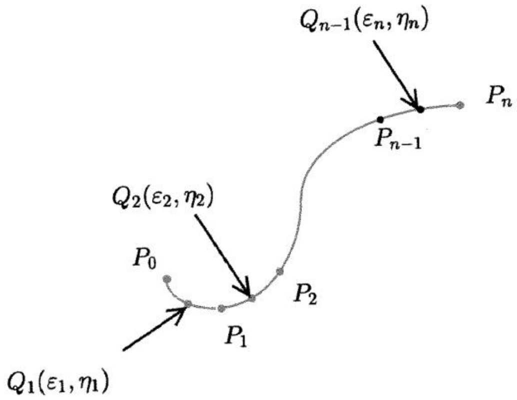
ونفرض أن الدالة $f(x,y)$ متصلة ومعرفة في المنطقة التي تشمل القوس C بداخلها.

نقسم القوس C إلى أقواس فرعية بتعيين $(n-1)$ من النقاط بين النقطتين A وB:

$$P_1, P_2, \dots P_{n-1}$$

حيث P_n =B , P_0 =A

ونرمز لإحداثيات النقطة P_i بالرمز $(x_i ، y_i)$ حيث $i = 0,1,2, \dots n$ وبين كل نقطتين متتاليتين في التقسيم نختار نقطة على المنحنى Q_i،حيث $i = 1,2,\dots n$ ويرمز لإحداثيات النقطة Q_i بالرمز (ε_i , η_i) . انظر الشكل (2.2):



شكل (2.2)

الان نعتبر المجموع:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i , \eta_i)\, \Delta x_i$$

حيث:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

ونسمي النهاية التي يؤول إليها هذا المجموع إن وجدت وذلك عندما $n \to \infty$ و Δx_i تقترب من الصفر بالتكامل الخطي بالنسبة للمتغير x .

ويرمز للتكامل الخطي للدالة f بالنسبة للمتغير x *على المنحنى* c بالرمز $\int_c \; f(x,y)dx$.

وكذلك يمكن تكوين المجموع:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i \,, \eta_i)\Delta y_i$$

ونسمي النهاية التي يؤول إليها هذا المجموع إذا وجدت وذلك عندما $n\to \infty$ و Δy_i تقترب من الصفر بالتكامل الخطي بالنسبة للمتغير y.

ويرمز للتكامل الخطي للدالة f بالنسبة للمتغير y على المنحنى C بالرمز $\int_c \; f(x,y)\; dy$.

ملاحظات:

1- التكامل الخطي يعتمد على الدالة f، وعلى نقطتي نهاية التكامل A و B وعلى القوس C.

2- بصفة عامة $\int_c \; f(x,y)\; dy \neq \int_c \; f(x,y)\; dx$.

إذا كان القوس C**جزءا** من محور X فإن التكامل الخطي $\int_c \; f(x,y)\; dx$ يختزل إلى التكامل المعتاد:

$$\int_A^B f(x,y)\; dx = \int_a^c f(x,0)\; dx$$

بينما $\int_c \; f(x\,,y)\; dy = 0$

خواص التكامل الخطي:

1- إذا تغير اتجاه القوس C، فإن إشارة التكامل تتغير أيضا:

$$\int_A^B f(x,y)\; dx = -\int_B^A f(x,y)\; dx$$

2- إذا كان القوس C_1 يمتد من A_1 إلى A_2 و C_2 يمتد من A_2 إلى A_3 ، فإن:

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\; dx + \int_{A_2}^{A_3} f(x,y)\; dx \;\; = \int_{A_1}^{A_3} f(x,y)\; dx$$

3- خاصية الجمع:

إذا كان لدينا الدالتين f،g مستمرتين ومعرفتين على القوس C فإن:

$$\int_c \; [f(x,y) + g(x,y)]\; dx = \int_c \; f(x,y)\; dx + \int_c \; g(x,y)\; dx$$

ويمكن تعريف التكامل الخطي بالنسبة لطول القوس(C) كما يأتي:

$$\int_A^B f(x,y)ds$$

حيث (x) ترمز إلى طول القوس من النقطة A إلى النقطة B.

وإذا كان القوس Cعلى الصورة $y = g(x)$ ، فإن:

$$\int_A^B f(x,y)ds = \int_A^B f(x,y)\sqrt{1 + (g(x))^2}\; dx$$

وإذا كان القوس C على الصورة $x = h(y)$، فإن:

$$\int_A^B f(x,y)ds = (c)\int_A^B f(x,y)\sqrt{1+(h(y))^2}\ \ dy$$

وإذا لم يكن القوس C على الصورتين السابقتين، فإنه يمكن تجزئة القوس C إلى مجموعة من الاقواس، لكل واحد منهما دالته المناسبة وبذلك يمكن إيجاد التكامل الخطي على كل جزء وجمع التكاملات.

طرق إيجاد التكاملات الخطية:

التعريفات السابقة لا تستعمل عادة في إيجاد قيمة التكاملات الخطية كما هو الحال في التكاملات المعتادة ومن المشوق أن كل التكاملات الخطية يمكن اختزالها إلى التكاملات المعتادة التي درسنا طرق إيجادها بالتفصيل.

والنظرية التالية ترسخ قاعدة اختزال التكامل الخطي إلى التكامل المعتاد للدالة في متغير واحد.

نظرية (1):

نفرض أن القوس C يمكن إيجاد طوله ويعطى على الصورة:

$$t_0 \ \le t \le t_1 \,, x = x(t), y = y(t)$$

حيث النقطتين B (c، d)وA (a، b) تناظران t_1 وt_0 على التوالي. وإذا كانت الدالة $f(x\ ,\mathrm{y})$ متصلة في المنطقة التي تحتوي على القوس C وإذا كانت$y(t)$ و $x(t)$متصلتين، فإن:

1. $\int_A^B f(x,y)dx = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t),y(t)]x(t)dt$

2. $\int_A^B f(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t),y(t)]y(t)dt$

3. $\int_A^B f(x,y)ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t),y(t)]\sqrt{(x(t))^{\,2} + (y(t))^2}\ dt$

وكنتيجة للنظرية السابقة إذا كان القوس C على الصورة $\mathrm{y} = g(x)$ ، فإن:

$$\int_A^B f(x,y)dx = \int_a^c f[x,g(x)]dx$$

وإذا كان القوس C على الصورة $x = h(y)$ ، فإن:

$$\int_A^B f(x,y)dy = \int_b^d f[h(y),y]dy$$

وبذلك فإن طرق حل التكامل الخطي هي:

1- إيجاد التكامل الخطي على المسار بحيث يصبح التكامل بدلالة متغير واحد.

2- إيجاد التكامل الخطي بالصورة البارا مترية.

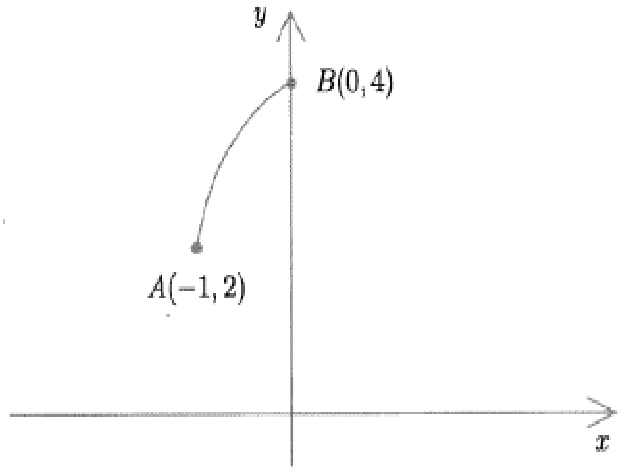
مثال (1):

أوجد قيمة التكامل الخطي:

$$\int_c \ (x^2 -\ y^2)\,dx - \int_c \ \ 2xydy$$

حيث C القوس الموضح بالشكل (3)، والمعادلة البارا مترية للقوس C:

$$0 \le t \le 1, x(t) = t^2 - 1\,, y(t) = t^2 + t + 2$$



شكل (3.2)

الحل:

بتطبيق الجزئين (1) و(2) من النظرية (1) نجد أن:

$$\int_c (x^2 - y^2)dx = \int_0^1 [(t^2-1)^2 - (t^2+t+2)^2]2tdt$$
$$= \int_0^1 [2t^5 - 4t^3 + 2t]dt - \int_0^1 [2t^5 + 4t^4 + 10\,t^3 + 8t^2 + 8t]dt$$
$$= \frac{t^6}{3} - t^4 + t^2 \Big|_0^1 - (\frac{t^6}{3} + \frac{4t^5}{5} + \frac{5t^4}{2} + \frac{8t^3}{3} + 4t^2)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{3} - 1 + 1 - (\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + 4)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{103}{10}$$
$$= \frac{-299}{30}$$

وبطريقة مماثلة يمكن إيجاد قيمة الحد الثاني من التكامل الخطي:

$$\int_c 2xy\ dy = 2\int_0^1 (t^2-1)\,(t^2+t+2)\,(2t+1)\,dt$$
$$= 2\int_0^1 (t^4 + t^3 + 2t^2 - t^2 - t - 2)\,(2t+1)dt$$
$$= 2\int_0^1 (2t^5 + 2t^4 + 4t^3 - 2t^3 - 2t^2 - 4t + t^4 + t^3 + 2t^2 - t^2 - t - 2)dt$$
$$= 2\int_0^1 (2t^5 + 3t^4 + 3t^3 - t^2 - 5t - 2)dt$$

$$= 2[\frac{t^6}{3} + \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} - 2t]\Big|_0^1$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} - 2\right]$$

$$= 2\left(\frac{-63}{20}\right) = \frac{-63}{10}$$

و هكذا:

$$\int_c (x^2 - y^2)dx - \int_c 2xy\, dy = \frac{-299}{30} - (\frac{-63}{10}) = \frac{-11}{3}$$

مثال (2):

أوجد قيمة التكامل الخطي وارسم القوس C.

$$\int_c (\frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dx + \frac{2y}{4x^2+y^2} dy)$$

حيث C القوس $y = \frac{1}{2}x^2$ من النقطة (0,0) إلى النقطة (2,2).

الحل:

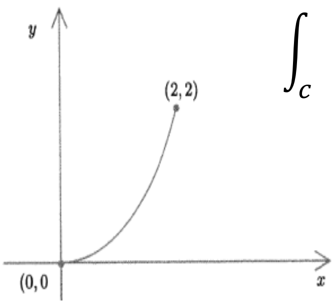
$$\int_c (\frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dx + \frac{2y}{4x^2+y^2} dy)$$

$$= \int_c \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}} dx + 2\int_c \frac{y}{4x^2+y^2} dy$$

حيث:

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

وبذلك $dy = xdx$ وبالتعويض عن y نجد أن:



$$\int_c \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^4}} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{x\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} d$$

$$= \int_0^2 x\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= -2\,\frac{(1-\frac{1}{4}x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^2$$

$$= -2[2\left(1-\frac{1}{4}\mathrm{x}^2\right)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= -2[0-2]$$

$$= -2(-2) = 4$$

وبطريقة مماثلة:

$$2\int_c \frac{y}{4x^2+y^2}dy = \int_0^2 \frac{x^2}{4x^2+\frac{1}{4}x^4}(xdx)$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{4x^2+\frac{1}{4}x^4}dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{x^2\left(4+\frac{1}{4}x^2\right)}dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{4+\frac{1}{4}x^2}dx$$

$$= 2\ln(4+\frac{1}{4}x^2)\Big|_0^2$$

$$= 2\ln\frac{5}{4}$$

وبذلك:

$$\int_c \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}dx + \frac{2y}{4x^2+y^2}dy\right) = 4+2\ln\frac{5}{4}$$

مثال (3):

أوجد قيمة التكامل الخطي:

$$\int_c \left(x+(3y)^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} ds$$

حيث C هو القوس $y = \frac{1}{3}x^3$ من النقطة (0 , 0) إلى النقطة (3,9).

الحل:

بما أن $dy = x^2 dx$ وبالتعويض عن y نجد أن:

$$\int_c \left(x + (3y)^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} ds = \int_0^3 \left(x + \left(3\frac{1}{3}x^3\right)^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (x^2)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 (x + x^5)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + x^4}\,dx$$

$$= \int_0^3 (x + x^5)^{\frac{1}{2}} (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{x}\sqrt{(1 + x^4)}\sqrt{(1 + x^4)}\,dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{x}(1 + x^4)\,dx$$

$$= \int_0^3 \left(\sqrt{x} + x^{\frac{9}{2}}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{11}x^{\frac{11}{2}}\right)\Bigg|_0^3$$

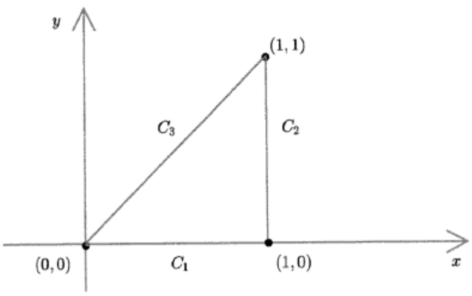
$$= \frac{508\sqrt{3}}{11}$$

مثال (4):

أوجد:

$$\int_c \left[(x + 4y)dx + (x^3 - y^3)dy\right]$$

حيث القوس C يتكون من القوس C_1 من النقطة (0,0) إلى النقطة (1,0) والقوس C_2 من النقطة (1,0) إلى النقطة (1,1)، ثم أوجد قيمة التكامل الخطي على القوس C_3 من النقطة (0,0) إلى النقطة (1,1)، كما هو موضح بالشكل (5.2):



شكل (5.2)

الحل:

على القوس C_1 يكون $y = 0$ و $0 \le x \le 1$ وهذا يعني أن $dy = 0$.

وبذلك:

$$\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy]$$

$$= \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

وعلى القوس C_2 يكون $x = 1$ وهذا يعني أن $dx = 0$ و $0 \le y \le 1$.

وبذلك:

$$\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy] = \int_0^1 (1 - y^3)dy$$

$$= \left(y - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

وهكذا:

$$\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy] = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

معادلة القوس C_3 هي $y=x$ إذاً:

$$\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy] = \int_0^1 5x dx = \frac{5x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{5}{2}$$

استقلال التكامل الخطي عن المسار:

قيمة التكامل الخطي تعتمد على ما يأتي:

1. الدالة المكاملة.
2. نقطتا نهاية التكامل Aو B.
3. المسار او القوس الذي يربط بين النقطتين A وB.

وعندما يعتمد التكامل الخطي على (1) و (2) فقط نقول إن قيمة التكامل الخطي مستقلة عن المسار.

نظرية (2):

إذا كان لدينا الدوال Q,P متصلة ومعرفة على القوس C وكان:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

تفاضل تام أي أنه توجد دالة $f(x, y)$ حيث أن:

$$df = p\,dx + Q\,dy$$

وإذا كان القوس C على البارمترية التالية:

$$t_0 \le t \le t_1, y = y(t), x = x(t)$$

وإذا كانت $x(t)$ و $y\ (t)$ متصلتين، فإن:

$$\int_c (pdx + Qdy) = f[x(t_1), y(t_1)] - f[x(t_0), y(t_0)]$$

أي أن التكامل الخطي يعتمد على نقطتي النهاية A وB وليس على القوس C الذي يربط بينهما.

والتكامل الخطي يكون مستقل عن المسار إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

مثال (5):

بين أن الدالة التكاملية تفاضل تام ثم أوجد قيمة التكامل الخطي.

$$\int_c (e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy)$$

حيث C أي قوس من النقطة (1,0) إلى (0,1).

الحل:

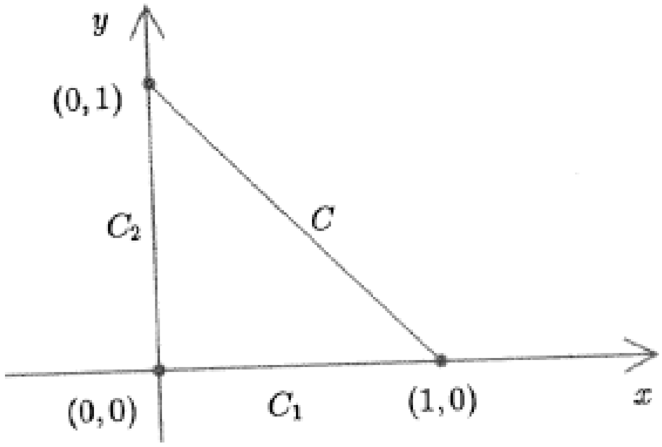
$$\mathrm{P}(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad Q(x\,,y) = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

إذاً التكامل مستقل عن المسار.

بما أن التكامل مستقل عن المسار، أي أنَ التكامل على القوس C يساوي مجموع التكامل على القوس C_1 والتكامل على القوس C_2.



شكل (6.2)

على القوس C_1: $0 \le x \le 1$ و $y = 0$.

أي أن:

$$\int_{c_1} (e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy) = \int_1^0 e^x dx = e^x \Big|_1^0 = 1 - e$$

على القوس: C_2 $x = 0$ و $0 \le y \le 1$.

أي أن:

$$\int_{c_2} (e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy\,) = -\int_0^1 \sin y\, dy = \cos y \Big|_0^1$$
$$= \cos(1) - 1$$

وبذلك:

$$\int_c (e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy) = 1 - e + \cos(1) - 1$$
$$= -e + \cos(1)$$

أنواع التكامل:

1-التكامل المحدد:

إذا كانت $b \le x \le$ a وكانت $f(x)$ دالة معرفة على الفترة [a,b] وهي الفترة التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متصلة فإن تعريف التكامل المحدد للدالة $f(x)$ من a إلى b هو قيمة التكامل $\int_a^b f(x)dx$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

حيث a و b هما حدود التكامل و a يمثل الحد السفلي للتكامل و b يمثل الحد العلوي للتكامل.

خصائص التكامل المحدد:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين خلال فترة التكامل $a \leq x \leq b$ فإنَ:

خاصية (1):

$$\int_{a}^{b} Af(x)dx = A\int_{a}^{b} f(x)dx$$

حيث A أي مقدار ثابت.

خاصية (2):

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

خاصية (3):

$$\int_{a}^{b} f(x) \pm g(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx$$

خاصية (4):

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

خاصية (5):

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

بشرط $f(x)$ تكاملية على a و b .

مثال (6):

كامل الاتي:

$$\textbf{1-}\int_{2}^{3} 5dx$$

الحل:

$$\int_{2}^{3} 5dx = 5x \Big|_{2}^{3} = 5(3) - 5(2) = 5$$

$$\textbf{2-}\int_{0}^{2} (x^2 - 1)dx$$

الحل:

$$\int_0^2 (x^2-1)dx = \frac{x^3}{3} - x \Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{(2)^3}{3} - 2\right) - (0-0)$$

$$= \frac{8}{3} - 2 = 2$$

3- $\int_{-2}^{-2} (x^3 - x + 1)dx$

الحل:

$$\int_{-2}^{-2} (x^3 - x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-2}^{-2}$$

$$= \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^2}{2} + (-2)\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^2}{2} + (-2)\right] = 0$$

مثال (7):

إذا كان:

$$\int_1^3 f(x)dx = 5 \,, \int_1^7 f(x)dx = 15$$

أوجد:

$$\int_3^7 f(x)dx = ?$$

الحل:

$$\int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx = \int_1^7 f(x)dx$$

$$5 + \int_3^7 f(x)dx = 15$$

$$\int_3^7 f(x)dx = 15 - 5 = 10$$

$$\therefore \int_3^7 f(x)dx = 10$$

2-التكامل غير المحدد:

إذا كانت $f(x)$ دالـة معرفـة علـى [a,b]، وإذا وجدت دالـة $F(x)$ ، حيث $F(x)$ متصلة علـى [a,b]، وقابلة للاشتقاق على [a,b] و $F(x) = f`(x)$ ، فإن F تسمى العلاقة العكسية لتفاضل الدالة $f(x)$ أو تكامل $f(x)$ غير المحدد ويرمز لذلك بالرمز:

$$F(x) = \int f(x)dx = F(x) + c$$

وتقرأ F هو تكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x وتسمى $f(x)$ الدالة المكاملة.

خصائص التكامل غير المحدد:

خاصية (1):

تفاضل التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ يساوي عبارة التكامل:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

خاصية (2):

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

حيث A أي مقدار ثابت.

خاصية (3):

التكامل غيرالمحدد لمجموع أو طرح دالتين يساوي مجموع أو طرح التكاملين الغير محددين للدالتين.

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال (8):

أوجد:

$$\int (3x^3 + 2x^2)dx$$

الحل:

$$\int (3x^3 + 2x^2)dx = 3\int x^3dx + 2\int x^2dx$$

$$= 3\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + c$$

حيث c ثابت التكامل.

مثال (9):

أوجد:

$$\int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) dx$$

الحل:

$$\int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) dx = \int x^2 dx + 3 \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3 \ln x + c$$

مثال (10):

أوجد:

$$\int (3x^2 - e^4 x + \sec(25)) dx$$

الحل:

$$\int (3x^2 - e^4 x + \sec(25)) dx$$

$$= 3 \int x^2 dx - e^4 \int x dx + \int \sec(25) dx$$

$$= 3 \frac{x^3}{3} - e^4 \frac{x^2}{2} + \sec(25) x + c$$

$$= x^3 - e^4 \frac{x^2}{2} + \sec(25) x + c$$

لاحظ أنه في هذا المثال لو فاضلنا ناتج التكامل وهو:

$$x^3 - e^4 \frac{x^2}{2} + \sec(25) x + c$$

بالنسبة لـ x فإننا نحصل على:

$$3x^2 - e^4 x + \sec(25) + 0$$

وهي نفس الدالة التي كاملناها.

مثال (11):

أوجد:

$$\int \left(\frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\right) dx$$

الحل:

$$\int \left(\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\right) dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (x+5-4x^{-2})dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+c$$

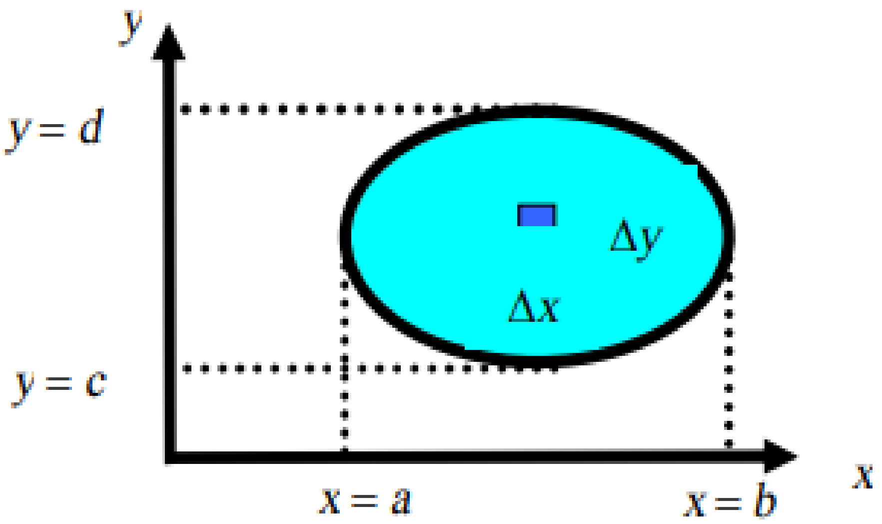
بعض طرق إيجاد التكامل المحدد والتكامل غير المحدد:

1- التكامل بالتعويض
2- التكامل بالتجزئة
3- التكامل بالكسور الجزئية

التكامل الثنائي:

تعريف التكامل الثنائي:

لنفرض أن لدينا الدالة $f(x,y)$ في متغيرين x,y معرَفة على منطقة (A) كما هو موضح بالشكل (7.2) ونفرض أننا قسمنا هذه المنطقة إلى مساحات كل مساحة جزئية $\delta A_1, \delta A_2, \dots \delta An$ تساوي $\Delta x_1 \Delta y_1, \Delta x_2 \Delta y_2$، ... إلخ.



شكل (7.2)

والآن بفرض وجود نقطة (x_r, y_r) في المنطقة المراد حساب مساحتها وبفرض حساب المجموع التالي:

$$f(x_1, y_1)\Delta A_1 + f(x_2, y_2)\Delta A_2 + f(x_3, y_3)\Delta A_3 + \cdots + f(x_n , y_n)\Delta A_n$$

ويمكن كتابته على الصورة المختصرة التالية:

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r)\Delta A_r$$

والآن لو أخذنا نهاية هذا المجموع عندما تصل عدد الأقسام إلى مالا نهاية والمساحة الجزئية للعنصر تصل إلى الصفر وهذا يعطينا تعريف علمي للتكامل الثنائي كالاتي:

التكامل الثنائي للدالة $f(x, y)$ فوق المنطقة A مكتوب على النحو التالي:

$$\iint_A f(x, y)dA = \iint_A f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta A\to 0}} \sum_{r=1}^{\infty} f(x_r, y_r)\,\Delta A_r$$

خواص التكامل الثنائي:

الخواص الأساسية للتكامل الثنائي مشابهة تماما لخواص التكامل للدالة في متغير واحد، وفيما يلي سنذكر أهم الخواص الأساسية للتكامل الثنائي:

إذا كانت الدالتان f , g قابلتين للتكامل في المنطقة المغلقة R ، فإن:

1- $\iint_R cf(x, y)dA = c\iint_R f(x, y)dA$

حيث أن c مقدار ثابت.

2- $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]dA = \iint_R f(x, y)dA \pm \iint_R g(x, y)dA$

3- إذا كان لكل (x, y) في R يكون $m \le f(x, y) \le M$ وإذا كان A(R) ترمز إلى مساحة R، فإن:

$$mA(R) \le \iint_R f(x, y)dA \le MA(R)$$

4-إذا كانت $f(x, y) \le g(x, y)$ فإن:

$$\iint_R f(x, y)dA \le \iint_R g(x, y)dA$$

5-إذا كانت R مكونة من عدة مناطق $(R_1, R_2, \ldots)$ وf متصلة في R، فإن:

$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_{R_1} f(x, y)dA + \iint_{R_2} f(x, y)dA + \cdots$$

نظرية (3):

إذا كانت $f(x,y)$ متصلة في المنطقة المغلقة R حيث:

$$f_1(x) \le y \le f_2\,(x) \qquad ; \qquad a < x < b$$

$f_2(x)$ و $f_1(x)$ دالتان متصلتان، فإن:

$$\iint_R \; f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_{1(x)}}^{f_{2(x)}} f(x,y)dydx$$

وبصورة مشابهة تماما إذا كانت R على الصورة:

$$g_1(y) \le x \le g_2(y) \qquad ; \qquad c \le y \le d$$

$g_1(y)$ و $g_2(y)$ دالتان متصلتان، فإن:

$$\iint_R \; f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_{1(y)}}^{g_{2(y)}} f(x,y)dxdy$$

طرق إيجاد التكامل الثنائي (التكامل الجزئي):

إذا كانت المنطقة R على شكل مستطيل في المستوى XY حيث أن

$c \le y \le d\,, a \le x \le b$ وإذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R، فإن التكامل المعتاد بالنسبة للمتغير x هو:

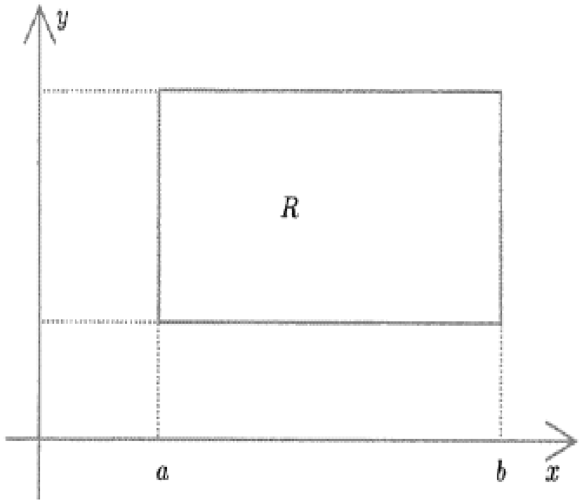
$$\int_a^b f(x,y)dx$$

ويكون الناتج دالة في y فقط ولذلك $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ معرّفة في الفترة

$\mathrm{c} \le y \le d$.

وتكامل الدالة $A(y)$ يمكن أن يحسب كما يأتي:

$$\int_c^d A(Y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$



شكل (8.2)

ويمكن البداية من الناحية الأخرى:

$$B(X) = \int_c^d f(x,y)dy$$

وهكذا:

$$\int_a^b B(X)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

التكامل:

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \quad \text{أو} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

يسمى التكامل الجزئي أو التكامل المتكرر للدالة f.

ملاحظة:

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

وكذلك:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

مثال (18):

احسب التكامل الثنائي:

$$I = \int_2^3 \int_1^5 (x + 2y)dxdy$$

الحل:

$$\int_1^5 (x + 2y)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2yx\right)\Big|_1^5 = \left(\frac{25}{2} + 10y\right) - \left(\frac{1}{2} + 2y\right)$$

$$= 12 + 8y$$

$$I = \int_2^3 (12 + 8y)dy = (12y + 4y^2)\Big|_2^3$$

$$= (36 + 36) - (24 + 16) = 32$$

مثال (19):

احسب التكامل الثنائي:

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x^3} (x^2 + y^2)dydx$$

الحل:

$$\int_{x^2}^{x^3} (x^2 + y^2)dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right|_{x^2}^{x^3} = \left(x^5 + \frac{x^9}{3}\right) - \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right)$$

$$I = \int_0^1 \left(x^5 + \frac{x^9}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right)dx = \left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{30} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^1$$

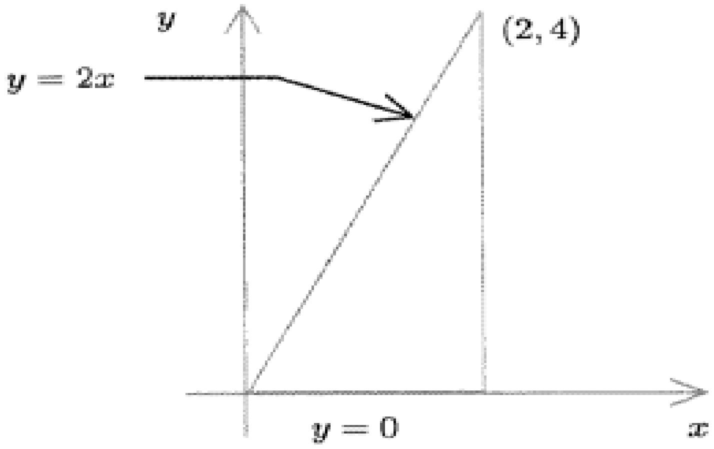
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{30} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = -\frac{1}{21}$$

مثال (20):

أوجد $\iint_R xydA$ حيث R المنطقة المغلقة الواقعة بين $x = 2, y = 2x, y = 0$

الحل:

يفضل دائما رسم المنطقة R قبل وضع حدود التكامل.



شكل (9.2)

واضح من الشكل أنه يمكن إجراء عملية التكامل حسب الترتيب $dy\ dx$ أو $dx\ dy$.

إذا اخترنا الترتيب $dy\ dx$:

$$\iint_R \ xydA = \int_0^2 \int_0^{2x} xy\ dydx$$

$$= \int_0^2 \frac{xy^2}{2}\Big|_0^{2x} dx = \int_0^2 x(2x^2)dx$$

$$= \int_0^2 2x^3 dx = \frac{2x^4}{4}\Big|_0^2$$

$$= 8$$

وإذا اخترنا الترتيب $dxdy$:

$$\iint_R \ xy\ dA = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 xy\ dxdy = \int_0^4 (\frac{x^2}{2}y)\Big|_{\frac{y}{2}}^2 dy$$

$$= \int_0^4 \left(2y - \frac{y^3}{8}\right) dy = 8$$

لاحظ تساوي القيمتين.

مثال (21):

أوجد:

$$\int_1^e \int_0^x \ln x \, dydx$$

الحل:

$$\int_1^e [y \ln x] \Big|_0^x dx = \int_1^e x \ln x \, dx$$

ويمكن إيجاد التكامل الأخير باستخدام التكامل بالتجزئة كما يلي:

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - (\frac{x^2}{4}) \Big|_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

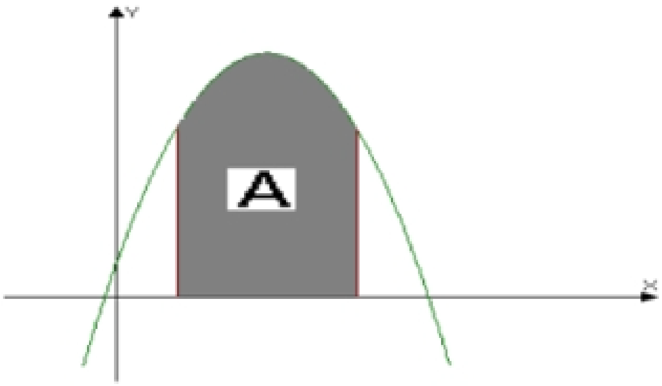
المساحة.

من المعلوم أنَ تطبيقات التكامل كثيرة جداً وسنتطرق هنا فقط لتطبيقات التكامل في حساب المساحة.

قواعد حساب المساحة باستعمال التكامل المحدود:

لتكن الدالة $y = f_{(x)}$ متصلة في الفترة [a,b].

1- إذا كانت $f_{(x)} \geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [a,b] فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين *a,b* ومحور السَينات تحسب كما يلي:



شكل (2-10)

$$A = \int_a^b f_{(x)} dx$$

مثال (22):

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$.

الحل:

بما أنَ $f_{(x)} \geq 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى كما يلي:

$$A = \int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

2- إذا كانت $f_{(x)} \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [a , b] فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a , b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A = \left|\int_a^b f_{(x)}\,dx\right|$$

مثال (23):

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = -x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = -2$ و $x = 2$.

الحل:

بما أن $f_{(x)} = -x^2 \leq 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى كما يلي:

$$A = \left|\int_{-2}^2 f_{(x)}dx\right| = \left|\int_{-2}^2 -x^2\,dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}\right| = \left|-\frac{16}{3}\right| = \frac{16}{3}$$

3- إذا وجد c بين النقطتين a و b أي أنَ a<c<b حيث $f_{(x)} \geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [a , c] و $f_{(x)} \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [c , b] فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a , b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A = \int_a^c f_{(x)}dx + \left|\int_c^b f_{(x)}dx\right|$$

4- وإذا وجد c بين النقطتين a و b أي أنَ a<c<b حيث $f_{(x)} \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [a , c] و $f_{(x)} \geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [c , b] فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a , b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A = \left|\int_a^c f_{(x)}\,dx\right| + \int_c^b f_{(x)}dx$$

مثال (24):

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x = -2$ و$x = 2$.

الحل:

بما أن $f_{(x)} = x^3 \geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [2, 0] و $f_{(x)} = x^3 \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [0 , 2-] فإنَ المساحة A تعطى كما يلي:

$$A = \left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right| + \int_{0}^{2} x^3\,dx = \left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\right| + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \left|-\frac{16}{4}\right| + \frac{16}{4} = 8$$

مثال (25):

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = -x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x = -3$ و $x = 2$.

الحل:

بما أن $f_{(x)} = -x^3 \geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [0 , 3-] و $f_{(x)} = -x^3 \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة [2 , 0] فإنَ المساحة A تعطى كما يلي:

$$A = \int_{-3}^{0} -x^3\,dx + \left|\int_{0}^{2} -x^3\,dx\right| = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0} + \left|-\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}\right| = \frac{81}{4} + \left|-\frac{16}{4}\right|$$
$$= \frac{97}{4}$$

المساحات باستعمال التكامل الثنائي:

يمكن حساب المساحة للمنطقة R باستعمال التكامل الثنائي.

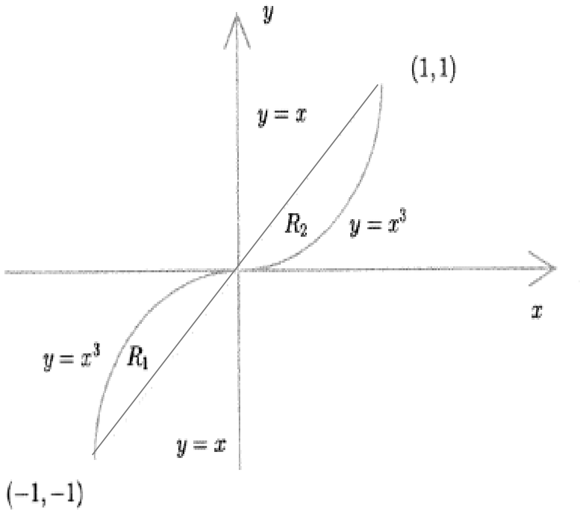
$$A = \iint_R \,dxdy = \iint_R \,dydx$$

مثال (26):

أوجد المساحة الواقعة بين المنحنى $y = x^3$ والمستقيم $y = x$.

الحل:

المعادلتان تتقاطعان عند النقاط التالية (0,0)، (1,1)، (1-,1-) كما هو موضح بالشكل (10.2):



شكل (10.2)

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

ولذلك:

$$A(R) = \int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} dydx + \int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} dydx \; A$$

$$A(R_1) = \int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} dydx = \int_{-1}^{0} y \Big|_{x}^{x^3} dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$A(R_2) = \int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} dydx$$

$$= \int_{0}^{1} y \Big|_{x^3}^{x} dx$$

$$= \int_{0}^{1}(x - \mathrm{x}^3)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}$$

إذا:

$$A(R) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي:

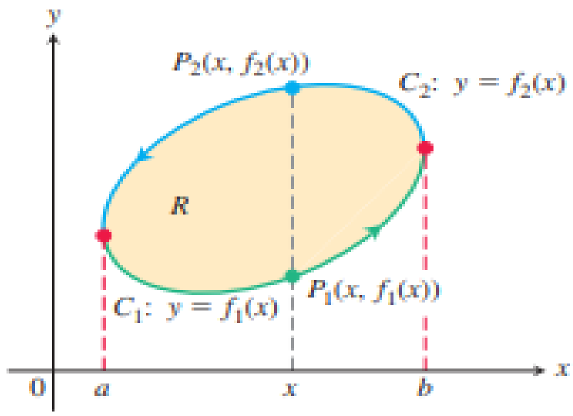
نظرية جرين:

لنفرض أن C منحنى مغلق سلسا وبسيطا في المستوى XY . لنفرض أن R هي المنطقة المحاطة ب C ونفرض أن M, N ، ومشتقاتها الجزئية الأولى متصلة في كل نقطة من بعض المناطق المفتوحة التي تحتوي على C و R.

نريد اثبات شكل الدوران الدائري لنظرية جرين.

$$\oint_c M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (1)$$

يوضح الشكل (11.2) C تتكون من جزئين موجهين:



شكل (11.2)

لأي x بين a وb ، يمكننا تكامل $\frac{\partial M}{\partial Y}$ بالنسبة ل y من $y = f_1(x)$ إلى $y =$ و$f_2(x)$والحصول على:

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy = M(x,y)\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} = M\big(x, f_2(x)\big) - M\big(x, f_1(x)\big)$$

يمكننا بعد ذلك تكامل هذا بالنسبة إلى x من a إلى b:

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b \big[M\big(x, f_2(x)\big) - M\big(x, f_1(x)\big)\big] dx$$

$$= -\int_b^a M(x, f_2(x)dx - \int_a^b M(x, f_1(x)dx$$

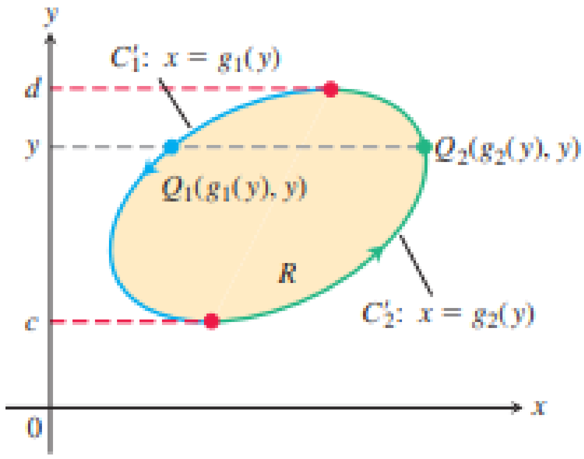
$$= -\int_{c_2} M\,dx - \int_{c_1} M\,dx$$

$$= -\oint_c M\,dx$$

لذلك، بعكس ترتيب المعادلات، يكون لدينا:

$$\oint_c M\,dx = \iint_R \left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (2)$$

المعادلة (2) هي نصف النتيجة التي نحتاجها للمعادلة (1) نشتق النصف الآخر من خلال دمج $\frac{\partial N}{\partial x}$ كما على النحو الأول فيما يتعلق بـx ثم فيما يتعلق بـy، كما هو موضح بالشكل(12.2).
يوضح هذا المنحنى C في الشكل (11.2) المتحلل إلى جزئين:



الشكل (12.2)

$$C`_1: x = g_1(y), d \geq y \geq c \; and \; C`_2: x = g_2(y), c \leq y \leq d$$

نحصل على نتيجة التكامل الثنائي:

$$\oint_c N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx\,dy \qquad (3)$$

بجمع المعادلتين (2)، (3) تعطي المعادلة (1) وهذا يثبت النظرية.

مثال (27):

احسب التكامل الخطي:

$$\oint_c xy\,dy - y^2 dx$$

حيث C هو المربع المقطوع من الربع الأول بالخطوط $x = 1$ و $y = 1$.

الحل:

بتطبيق نظرية جرين. $M = -y^2 \;,\; N = xy$

$$\oint_c M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

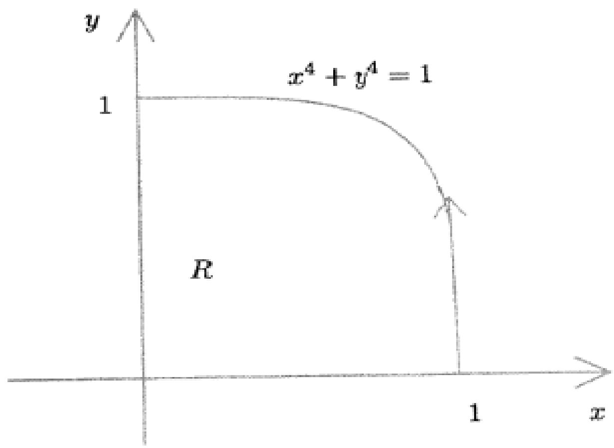
$$\oint_c -y^2 dx + xy\,dy = \iint_R \big(y - (-2y)\big) dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 3y dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (3xy)\Big|_0^1 dy = \int_0^1 3y\,dy = \frac{3}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

مثال (28):

أوجد:

$\oint_c 2y^3 dx + (x^4 + 6y^2 x)dy$ حيث C كما في الشكل (13.2).



شكل (13.2)

الحل:

$$\oint_c M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\mathrm{M} = 2y^3 \quad , \quad \mathrm{N} = x^4 + 6y^2 x$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = 4x^3 + 6y^2 \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = 6y^2$$

$$\oint_c 2y^3dx + (x^4 + 6y^2x)dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{(1-x^4)^{\frac{1}{4}}} (4x^3 + 6y^2 - 6y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{(1-x^4)^{\frac{1}{4}}} 4x^3\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 4x^3 y \Big|_0^{(1-x^4)^{\frac{1}{4}}} dx$$

$$= \int_0^1 \left[4x^3(1-x^4)^{\frac{1}{4}} - 0\right] dx$$

$$= \int_0^1 4x^3(1-x^4)^{\frac{1}{4}}\, dx$$

$$= -\frac{(1-x^4)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{4}{5}(1-x^4)^{\frac{5}{4}} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{4}{5}\left[(1-1)^{\frac{5}{4}} - (1-0)^{\frac{5}{4}}\right]$$

$$= -\frac{4}{5}(0-1)$$

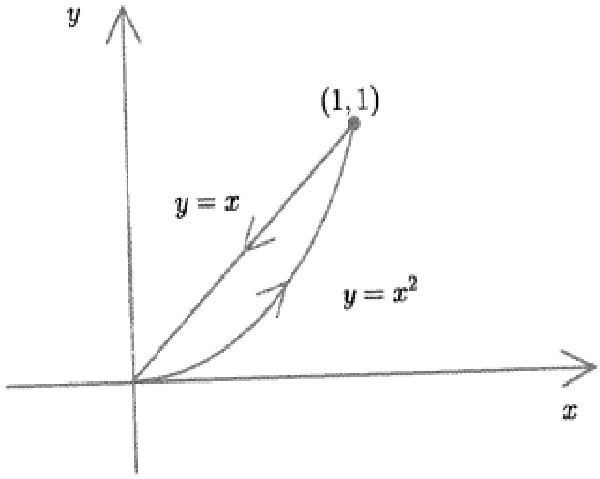
$$= \frac{4}{5}$$

مثال (29):

استخدم نظرية جرين لإيجاد قيمة التكامل الخطي.

$$\oint 5xy^2\, dx + x^2y\, dy$$

حيث أن C المنحنى المغلق الذي يتكون من رسم المعادلتين $y = x\, , y = x^2$



شكل (14.2)

الحل:

$$\oint_c \ 5xy^2dx + x^3y\,dy \quad , \quad M = 5xy^2 \quad , \quad N = x^3y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y \ , \ \frac{\partial M}{\partial y} = 10xy$$

الآن نقوم بتطبيق النظرية:

$$\oint_c \ 5xy^2\,dx + x^3y\,dy = \iint_R \ (3x^2\,y - 10xy)dA$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (3x^2 - 10xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 (3x^2 - 10x)\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^2 - 10x)(x^2 - x^4)dx$$

وبعد فك القوسين نجد أن:

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^4 - 3x^6 - 10x^3 + 10x^5)dx$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{7}x^7 - \frac{10}{4}x^4 + \frac{10}{6}x^6]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{5}(1)^5 - \frac{3}{7}(1)^7 - \frac{10}{4}(1)^4 + \frac{10}{6}(1)^6\right) - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{139}{210}\right]$$

$$= -\frac{139}{420}$$

مثال (30):

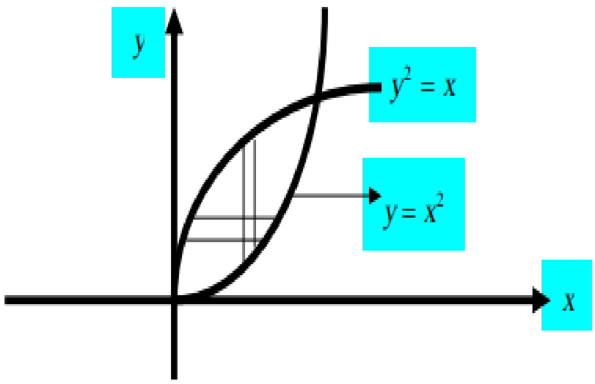
تحقق من نظرية جرين فالمستوى المقابل.

$$\oint_c (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

C هو المنحنى المغلق للمنطقة التي تحددها $y = x^2$ و $y^2 = x$.

الحل:

بدايةً نود الإشارة إلى أن المطلوب يعني أنه لابد من حساب كل من التكامل الخطي على المسار وكذلك التكامل الثنائي على المنطقة داخل نفس المسار ونتأكد من أن النتائج في الحالتين متساوي وهذا هو المقصود بالتحقق من نظرية جرين. وفي البداية نرسم منطقة التكامل حتى يتسنى لنا حساب كلا من التكامل الخطي والتكامل الثنائي.



الشكل (15.2)

والآن وكما هو موضح من الشكل أن التكامل الخطي سوف يتم حسابه على مسارين متتاليين في عكس عقارب الساعة على النحو التالي:

$$\mathrm{I}_1 = \int_{c_1} \quad c_1 \ : \ y = x^2 \qquad (1)$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_{c_2} \quad c_2 \ : \ x = y^2 \qquad (2)$$

بإجراء التكامل على المسار الأول:

$$c_1 \ : \ y = x^2$$

$$dy = 2x\ dx$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 (2x^3 - x^2)dx + (x + x^4)2x\ dx = \frac{7}{6}$$

بإجراء التكامل على المسار الثاني:

$$c_2 \ : \ x = y^2$$

$$dx = 2y\, dy$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_1^0 (2y^3 - y^4)2y\, dy + (y^2 + y^2)dy = -\frac{17}{15}$$

$$\therefore \oint_c \ = \frac{1}{30} \qquad (3)$$

والآن بعد حساب التكامل المعطى على أنه خطي نحسب التكامل على المنطقة المحصورة بين المنحنيين اللذان يمثلان المسار ولعمل هذا نبدأ بكتابة الدوال M وN كالآتي:

$$\mathrm{M}(x,y)2xy - x^2 \quad , \quad N(x,y) = x + y^2$$

كذلك الدوال الآتية:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

إذا:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2x$$

والآن بعد تجهيز الدالة التي سوف تستخدم في التكامل الثنائي على المنطقة المشار إليها سابقا فسوف نقوم بحساب التكامل في الاتجاه الأفقي أولا ثم في الاتجاه الرأسي وبذلك التكامل الثنائي على المنطقة يأخذ الشكل التالي:

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (1 - 2x)dx\, dy = \int_0^1 (x - x^2) \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 [(\sqrt{y} - y) - (y^2 - y^4)]dy$$

$$= \int_0^1 [\sqrt{y} - y - y^2 + y^4]dy = \frac{1}{30} \qquad (4)$$

واضح من المعادلتين (3) و (4) أن نظرية جرين محققة على التكامل المعطى.

النتائج والتوصيات والمقترحات

أولا :نتائج البحث:

للإجابة عن السؤال الأول قامت الباحثتان بالتعرف على التكامل الخطي وتعريفه والتكامل الثنائي وتعريفه وذلك عن طريق البحث عن المراجع والدراسات السابقة المتعلقة بموضوع البحث، وتتمثل النتائج فيما يلي:

1- تعرفنا على التكامل الخطي وخواصه وطرق حله.
2- تعرفنا على أنواع التكامل وبعض من طرق حلها.
3- تعرفنا على التكامل الثنائي وخواصه وطرق حله.
4- تعرفنا على أن التكاملات الخطية والتكاملات الثنائية تستخدم في حالة الدوال المعرفة في متغيرين.
5- تعرفنا على نص نظرية جرين وتطبيق أمثلة عليها.
6- توصلنا الي العلاقة الوطيدة بين التكامل على منحنى مغلق وبين المساحة المحصورة داخل هذا المنحنى فعرفت بنظرية جرين بحيث تحول التكامل على منحنى مغلق إلى تكامل ثنائي على المساحة المحصورة داخل هذا المنحنى المغلق.

ثانيا : التوصيات:

في ضوء النتائج التي تم التوصل إليها توصي الباحثتان بالآتي:

1- توفير مراجع عربية وأجنبية عن التكاملات في الرياضيات.
2- التوسع بدراسة التكاملات وأهميتها في الرياضيات.
3- عقد دورات وورش عمل بهدف اطلاع الباحثين والطلاب على أحدث المعلومات والمراجع التي تم التوصل إليها في موضوع التكاملات.

ثالثا : المقترحات:

1- إجراء دراسة تبين نوع العلاقات بين التكاملات المختلفة.
2- إجراء دراسة مقارنة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي.

المراجع

أولا: المراجع العربية:

1- رمضان جهيمة وأحمد هب الريح (1991): **التفاضل والتكامل الجزء الأول**، دار الكتاب الجديدة المتحدة، ليبيا.
2- رمضان جهيمة وأحمد هب الريح (1999): **التفاضل والتكامل الجزء الثاني**، دار الكتاب الجديدة المتحدة، ليبيا.
3- سعيد أحمد (2012): **الموسوعة التعليمية في الرياضيات الهندسية الجزء الثاني " التكامل "**، دار الكتاب الجامعي العين، الإمارات.
4- أحمد رحيل (2016): **مسائل محلولة في التكامل**، دار الحكمة، ليبيا.
5- مندلسون وآخرون: **حساب التفاضل والتكامل (سلسلة ملخصات إيزي شوم)**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر.

ثانيا: المراجع الأجنبية:

6- George B. Thomas, Jr(2014): **THOMAS,CALCULUS**, the United States of America, Library of Congress Cataloguing-in- publication Data.