مجـلـة الـتــربـوي Journal of Educational	معامل التأثير العربي 2.23 لسنة 2025 العدد 28 ــ يناير 2026

مجلة التربوي

مجلة علمية محكمة تصدر عن كلية التربية الخمس

جامعة المرقب

العدد الثامن والعشرون (28)

يناير 2026م

هيئة التحرير

د.علي سالم ابشيش	رئيس هيئة التحرير
د.سالم حسين المدهون	عضو هيئة التحرير
د.آمنة منصور هندر	عضو هيئة التحرير
د.عطية رمضان الكيلاني	عضو هيئة التحرير
د.إسماعيل ميلاد اشميلة	عضو هيئة التحرير
أ.سعاد معمر بالحاج	عضو هيئة التحرير

- المجلة ترحب بما يرد عليها من أبحاث وعلى استعداد لنشرها بعد التحكيم .
- المجلة تحترم كل الاحترام آراء المحكمين وتعمل بمقتضاها .
- كافة الآراء والأفكار المنشورة تعبر عن آراء أصحابها ولا تتحمل المجلة تبعاتها .
- يتحمل الباحث مسؤولية الأمانة العلمية وهو المسؤول عما ينشر له .
- البحوث المقدمة للنشر لا ترد لأصحابها نشرت أو لم تنشر .

(جميع الحقوق محفوظة لكلية التربية الخمس – جامعة المرقب)

مجلة التربوي
Journal of Educational
معامل التأثير العربي 2.23 لسنة 2025
العدد 28 – يناير 2026

ضوابط النشر:

يشترط في البحوث العلمية المقدمة للنشر أن يراعى فيها ما يأتي :

- أصول البحث العلمي وقواعده .
- ألا تكون المادة العلمية قد سبق نشرها أو كانت جزءا من رسالة علمية .
- يرفق بالبحث تزكية لغوية وفق أنموذج معد .
- تعدل البحوث المقبولة وتصحح وفق ما يراه المحكمون .
- التزام الباحث بالضوابط التي وضعتها المجلة من عدد الصفحات ، ونوع الخط ورقمه ، والفترات الزمنية الممنوحة للتعديل ، وما يستجد من ضوابط تضعها المجلة مستقبلا .

تنبيهات :

- للمجلة الحق في تعديل البحث أو طلب تعديله أو رفضه .
- يخضع البحث في النشر لأولويات المجلة وسياستها .
- البحوث المنشورة تعبر عن وجهة نظر أصحابها ، ولا تعبر عن وجهة نظر المجلة .

Publication Guidelines:

Research papers submitted for publication must adhere to the following:

- The principles and rules of scientific research.
- The material must not have been previously published or be part of an academic thesis.
- The research must be accompanied by a linguistic endorsement according to a prepared template.
- Accepted research will be edited and corrected according to the reviewers' opinions.
- The researcher must comply with the journal's guidelines regarding the number of pages, font type and size, time periods granted for modifications, and any future guidelines established by the journal.

Notices:

- The journal reserves the right to edit the research, request modifications, or reject it.
- The publication of research is subject to the journal's priorities and policies.
- Published research reflects the views of the authors and does not represent the views of the journal.

مجلة التربوي
Journal of Educational
معامل التأثير العربي 2.23 لسنة 2025
العدد 28 – يناير 2026

سطوح ريمان للدوال المركبة متعددة القيم وعلاقتها بالاستمرارية التحليلية في المستوى المركب $\mathbb{Z}$ - الدالة اللوغاريتمية مثالاً

زينب عمران الأخضر [1] ، زكية الأمين احميدة [2]

قسم الرياضيات – كلية التربية الخمس– جامعة المرقب [1،2]

z.o.alakhdar@elmirgib.edu.ly [1]

z.a.hameeda@elmirgib.edu.ly [2]

الملخص:

نعلم أن الدالة التحليلية ليست دالة بالمعنى الشائع، إذ قد يكون لقيمة واحدة من المتغير المستقل z عدة قيم (قابلة للعد) مقابلة لها. ولتفسير الدالة التحليلية $f(z)$ كدالة بالمعنى الشائع ، نربط $f(z)$ بسطح R تكون عليه $f(z)$ أحادية القيمة . يسمى مثل هذا السطح سطح ريمان للدالة التحليلية $f(z)$. في هذا البحث نسلط الضوء على سطوح ريمان للدوال التحليلية وكيفية تمثيلها ونمهد للموضوع بدراسة الاستمرارية التحليلية ومن ثم نقوم ببناء سطح ريمان لبعض الدوال التحليلية متعددة القيم وبالتحديد ندرس الدالة اللوغاريتمية.

الكلمات المفتاحية: الدالة اللوغاريتمية، الاستمرارية التحليلية، سطوح ريمان.

Abstract

An analytic function is not a function in the common sense, since one value of the independent variable z may have several (or even a countable number of) values corresponding to it. To be able to interpret an analytic function $f(z)$ as a function in the ordinary sense, we relate $f(z)$ to a surface R on which $f(z)$ is single-valued. The surface is called the *Riemann surface* for the analytic function $f(z)$. In this research, we highlighted the Riemann surface for the analytic function and how they represent, we pave the way for the study of analytic continuity, and then construct the Riemann surface for some multi-values analytic functions, specifically the logarithmic function.

Key words: analytic continuity, logarithmic function, Riemann surface.

مقدمة:

سطح ريمان هو سطح ثنائي البعد مزود ببنية مركبة بحيث يمكن النظر إليه محلياً كنسخة من المستوى المركب $\mathbb{C}$ أي أن كل نقطة من السطح لها حيز (جوار) يشبه المستوى المركب.

ويعتبر سطح ريمان تعميم المستوى المركب لسطح ذي أكثر من طية بحيث يكون للدالة متعددة القيم قيمة وحيدة مناظرة لكل نقطة على هذا السطح. حال تصميم مثل هذا السطح للدالة المعطاة تصبح الدالة وحيدة القيمة على السطح. ويمكن تطبيق نظرية الدوال وحيدة القيمة هنا. غالباً ما ترسم سطوح ريمان على شكل "طوابق" أو "طبقات" متصلة عن طريق ما يعرف بـ " خطوط التفرع " كما يلي: الطبقة الأولى: تمثل قيم معينة للدالة. الطبقة الثانية: القيم الأخرى. ويتم الانتقال بين الطبقات عبر مسارات معينة في المستوى المركب والتي تعرف بخطوط التفرع، الهدف الأساسي من سطوح ريمان كما ذكرنا هو جعل الدوال متعددة القيم دوالاً أحادية القيمة من خلال تغليف القيم المتعددة على طبقات مختلفة من السطح[1], [2]. تكمن فكرة سطح ريمان في إمكانية تصور سلوك عناصر الدالة واستمراريتها التحليلية هندسياً. حيث أن الدالة التحليلية الشاملة هي مجموعة جميع دوال العناصر الناتجة عن الاستمرارية التحليلية على طول المنحنيات من نقطة الأساس لدالة العنصر وهذه المجموعة تمثل مجموعة من متسلسلة قوى متقاربة عند نقاط مختلفة من المستوى المركب. لا تبدو هندسية بأي حال من الأحوال ولكن في الواقع، يمكن بسهولة تحديد بنية السطح. إن التعريف الدقيق والمفصل لماهية السطح هو خارج إطار هذا البحث ولكننا نكتفي هنا بالفكرة القائلة بأن السطح هو جسم ثنائي الأبعاد "يشبه" محلياً مجموعة مفتوحة في المستوى. أما التعريف الأكثر دقة فهو أن السطح فضاء تبولوجي متماثل محلياً مع المستوى المركب.

والسؤال المهم هنا هو لماذا نحتاج إلى سطوح ريمان؟ والاجابة ببساطة هي أن بعض الدوال المركبة (مثل الجذر التربيعي أو اللوغاريتم) ليست أحادية القيمة على $\mathbb{C}$ لذا نحتاج إلى سطح يمكن للدالة أن تعرف عليه بدون "تشعب" أو "تفرع" هذا ما تقدمه سطوح ريمان[3].

1. أمثلة على سطوح ريمان:

1) المستوى المركب نفسه $\mathbb{C}$ هو أبسط مثال على سطح ريمان.
2) كرة ريمان ، وهي المستوى المركب مع "نقطة عند اللانهاية" وتكتب غالباً $\mathbb{C}\cup\infty$.
3) طوروس ، يشبه شكل "دونات" وهو سطح ريمان يحتوي على ثقب واحد.
4) سطح متعدد القيم للجذر التربيعي:
   - الجذر التربيعي لـ z ليس دالة أحادية القيمة على $\mathbb{C}$.

- يمكن جعله أحادي القيمة إذا عرفناه على سطح ريمان مكون من طبقتين.

2. المفاهيم المرتبطة بسطوح ريمان:

- النقاط الشاذة.
- نقاط التفرع.
- التغليف غير القابل للفصل "الاستمرارية التحليلية".
- الرواسم التشابهية.
- الجنس: عدد الثقوب في السطح.

3. دراسات سابقة ومراجع أكاديمية على سطوح ريمان:

1- بيرنارد ريمان (1851 – 1857):

اطروحة بعنوان Grundlagen fur eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranerlichen complexen Grobe

- قدم مفهوم "سطح ريمان" لفهم الدوال متعددة القيم مثل الجذر التربيعي واللوغاريتم.
- فتح المجال لتمثيل الدوال المركبة كدوال أحادية القيمة على سطوح ريمان.

2- فيليكس كلاين وهنري بوانكاريه:

- دراساتهم حول الزمر الفوشيانية وأثرها في فهم سطوح ريمان من منظور الزمر التحويلية.
- بداية الربط بين سطوح ريمان والهندسة غير الاقليدية.

3- لارس. الفورس:

كتاب كلاسيكي بعنوان: "Complex Analysis" يستخدم على نطاق واسع.

- تناول شامل لنظرية سطوح ريمان من منظور التحليل المركب، وشرح الرواسم التوافقية والمتناظرة.
- يشمل تصنيف السطوح، وتغطية سطوح ريمان، والمترابطات، والتكامل المركب.

4- ليفمان. بيرس:

دراسة بعنوان " Uniformization and Moduli"

- توحيد سطوح ريمان.
- دراسة العلاقة بين سطوح ريمان والهندسة الزائدية والنماذج النمطية.

5- روبرت س. جونق.

محاضرات متقدمة بعنوان "Lectures on Reimann Surfaces"

- تحليل معمق للبنى المركبة، والدوال الميرومورفية، وأشكال ديفيرانسيالية على سطوح ريمان.

وغيرها الكثير من الدراسات التي أجريت في هذا الموضوع من قبل علماء الرياضيات قديماً وحديثاً، أما عن الكتابات العربية في هذا المجال فهي نادرة وربما تكون موجودة في شكل رسائل ماجستير أو دكتوراه، وغالباً ما تكون في أقسام الرياضيات البحتة في الجامعات، وللأسف لم نعثر على أي دراسة عن هذا الموضوع عند إعداد هذا البحث.

4. الاستمرارية التحليلية[4],[5]:

تعريف1 (الدالة التحليلية)[4],[5]: لنفترض أن العنصر $f(z)$ ثابت عند z_0. نتابعه تحليليًا على طول جميع المنحنيات بدءًا من z_0 التي تكون فيها هذه الاستمرارية ممكنة. تُسمى مجموعة العناصر الناتجة دالة تحليلية مُولّدة بواسطة العنصر $f(z)$. تُسمى مجموعة جميع هذه المنحنيات مجموعة المنحنيات المقبولة.

ينتمي هذا التعريف للدالة التحليلية إلى عالم الرياضيات الألماني K. T. W. Weierstrass. بحكم التعريف، تكون الدالتان التحليليتان متساويتين إذا وفقط إذا كانت العناصر الابتدائية متكافئة.

تعريف 2: افترض استيفاء الشروط التالية:

(1) الدالة $f(z)$ مُعرّفة على المجموعة E؛

(2) الدالة $F(z)$ منتظمة (هولومورفية) في النطاق D الذي يحتوي على E؛

(3) $F(z) \equiv f(z)$ عند $z \in E$.

عندها تُسمى الدالة $F(z)$ الاستمرارية التحليلية لـ $f(z)$ (من المجموعة E إلى النطاق D).

من أهم خصائص الاستمرارية التحليلية وحدانيتها.

نظرية 1: (مبدأ الاستمرارية التحليلية): افترض أن المجموعة E لها نقطة نهاية a تنتمي إلى النطاق D. عندها تكون الاستمرارية التحليلية من المجموعة E إلى النطاق D وحيدة.

على وجه الخصوص، إذا كان E منحنى يقع في D أو نطاقًا فرعيًا من D، فلا يوجد أكثر من استمرارية تحليلية واحدة لـ $f(z)$ في D.

مثال 1: أوجد الاستمرارية التحليلية للدالة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

هذه المتسلسلة متقاربة ومنتظمة في القرص المفتوح $K: |z| < 1$.

لدينا $f(z) = 1/(1-z)$، $|z| < 1$.

الدالة $F(z) = 1/(1-z)$ منتظمة في المستوى المركب الممتد $\mathbb{Z}$ مع حذف النقطة $z = 1$ (نسمي هذا النطاق D) و $F(z) = f(z)$ عند $|z| < 1$. وبالتالي، فإن الدالة $F(z)$ هي الاستمرار التحليلي (الوحيد) للدالة $f(z)$ من K إلى D .

تعريف3[3]: عنصر الدالة هو زوج مرتب(f, D) ، حيث D هو القرص $D(P, r)$ و f دالة هولومورفية مُعرّفة على D. إذا كانت W مجموعة مفتوحة، فإن عنصر الدالة في W هو الزوج (f, D) بحيث $D \subseteq W$.

1.4 الاستمرارية التحليلية المباشرة[3]:

ليكن (f, D_0) و(g, D_1) عنصري دالة. نقول إن (g, D_1) استمرارية تحليلية مباشرة للعنصر (f, D_0) إذا كانت $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$; و f و g متساويتان على $D_0 \cap D_1$. من الواضح أن (g, D_1) استمرارية تحليلية مباشرة لـ (f, D_0) إذا وفقط إذا كانت (f, D_0) استمرارية تحليلية مباشرة لـ (g, D_1).

ملاحظة 1[3]: أي عنصر دالة (f, D) هو استمرار تحليلي لنفسه.

ملاحظة 2[3]: لدينا علاقة تكافؤ عن طريق الاستمرار التحليلي لمجموعة عناصر الدالة: أي أن عنصري دالة متكافئان إذا كان أحدهما استمرارًا تحليليًا للآخر. تُسمى فئات التكافؤ الناتجة عن هذه العلاقة دوال تحليلية (شاملة). مع ذلك، تجدر الإشارة إلى أن الدوال التحليلية الشاملة ليست دوالًا بالمعنى المعتاد، وليست تحليلية بأي معنى من المعاني التي حددناها حتى الآن. سيظهر مبرر المصطلحات لاحقًا في سياق هذا البحث.

إذا كانت f تُشير إلى الدالة التحليلية الشاملة المقابلة لـ (f, D)، فإننا نُسمي(f, D) فرعًا من f .

مثال 2[3]: لنفترض أن $D(1 + i0, 1/2)$ وأن f هي الدالة الهولومورفية $\log z$. هنا، يُفهم أن $\log z$ يُعرّف بأنه $\log |z| + i \arg z$، و $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$. يمكن استمرار عنصر الدالة (f, D) تحليليًا إلى النقطة $-1 + i0$ بطريقتين مختلفتين (على الأقل)، اعتمادًا على ما إذا كانت الاستمرارية على طول منحنى يتحرك في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل أو عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

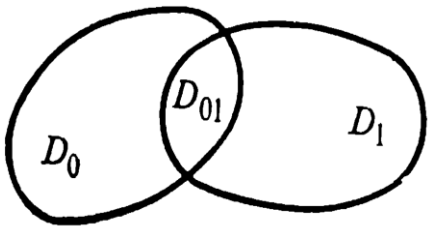
في الواقع، يمكن الحصول على جميع "فروع" $\log z$ بالاستمرارية التحليلية للفرع $\log|z| + i\arg z$ على $D(1 + 0i, 1/2)$ (بالاستمرار عدة مرات حول نقطة الأصل، إما في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة). وبالتالي، فإن فكرة "فروع" $\log z$ تتوافق مع مصطلحات الاستمرارية التحليلية العامة التي طُرحت للتو.

في بعض الحالات، من المناسب اعتبار عنصر الدالة متسلسلة قوى متقاربة. عندها، يلعب مجال تقارب متسلسلة القوى دور القرص المفتوح D (كما في مثال 1). تُعد هذه فكرةً استدلاليةً مفيدةً للمهتمين بالبحث في هذا المجال ليضعوها في اعتبارهم. من هذا المنظور، يجب اعتبار عنصري الدالة (f, D) و$(g, \widetilde{D})$ عند النقطة P (بحيث يكون D و$\widetilde{D}$ قرصين مركزهما نفس النقطة P) متساويين إذا كان $f \equiv g$ على $D \cap \widetilde{D}$. في البند القادم سنتناول الاستمرارية التحليلية على طول متتالية من النطاقات سواء أكانت أقراص أو غيرها من المناطق[3].

2.4 الاستمرارية التحليلية على طول متتالية من النطاقات[4]:

يلعب مفهوم الاستمرارية التحليلية دورًا بالغ الأهمية في نظرية دوال المتغير المركب. يؤدي تعميم هذا المفهوم إلى تعميم مفهوم الدالة المنتظمة، أي إلى مفهوم الدالة التحليلية متعددة القيم.

لنفترض أن لدينا نطاقين، D_0 وD_1، بحيث يكون تقاطعهما D_{01} ليس خالياً ويمثل نطاقاً كما بالشكل



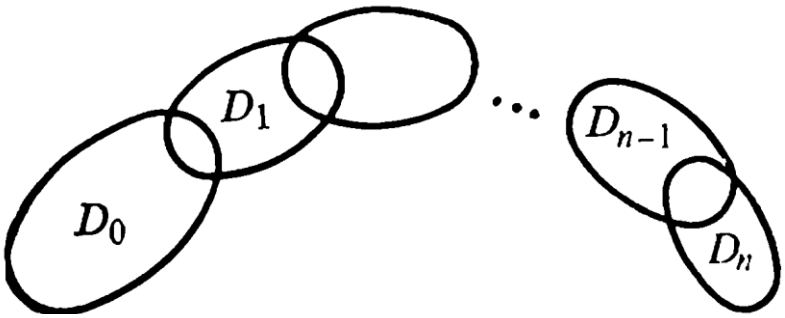
شكل 1. نطاقين متقاطعين

لنفترض أن لدينا دالتين $f_0(z)$ و $f_1(z)$ منتظمتين في D_0 وD_1، على التوالي، وتتطابقان في D_{01}، أي أن

$$f_1(z) \equiv f_0(z) \quad , \quad z \in D_{01} .$$

عندها، تُعتبر الدالة $f_1(z)$ استمرارًا تحليليًا مباشرًا للدالة $f_0(z)$ من المجال D_0 إلى المجال D_1. ووفقًا لنظرية الوحدانية ، تكون هذه الاستمرارية وحيدة.

لنفترض الآن أن لدينا متتالية من النطاقات $D_0, D_1, \dots, D_n$ بحيث تكون جميع التقاطعات $D_j \cap D_{j+1}, 0 \le j \le n-1$ ، ليست خالية بل تمثل نطاقات كما بالشكل



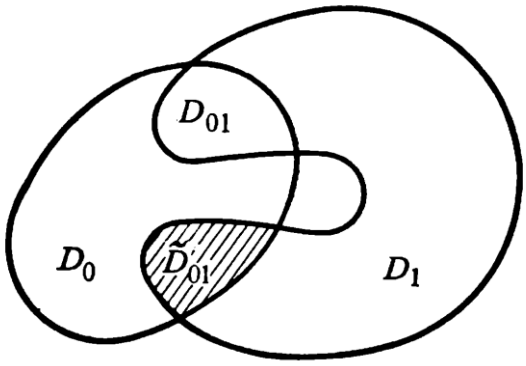
شكل 2. متتالية من النطاقات المتقاطعة

لنفترض أن لدينا دوالًا $f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z)$ ، بحيث تكون كل دالة لاحقة $f_{j+1}(z)$ هي استمرار تحليلي مباشر للدالة السابقة $f_j(z)$ من النطاق D_j إلى النطاق D_{j+1} . هذا يعني أن الدوال $f_j(z)$ منتظمة في النطاقات D_j وأن $f_j(z) \equiv f_{j+1}(z)$, $z \in D_j \cap D_{j+1}$. عندها، يُقال إن الدالة $f_n(z)$ هي استمرار تحليلي للدالة $f_0(z)$ على طول متتالية النطاقات $D_0, D_1, \dots, D_n$ ؛ وهذه الاستمرارية وحيدة.

مجموعة الدوال المنتظمة التي حصلنا عليها للتو، $\{f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z)\}$ ، تُعرّف دالة $F(z)$ تُعطى قيمها بالصيغة

$$F(z) = f_j(z), \qquad z \in D_j.$$

لاحظ أن "الدالة" $F(z)$ قد تكون متعددة القيم. في الواقع، قد تُشكّل متتالية النطاقات $D_0, D_1, \dots, D_n$ حلقة مغلقة، أي أن D_0 قد تتقاطع مع D_n . لكن قيم $f_0(z)$ و $f_n(z)$ في $D_0 \cap D_n$ ليست مُلزمة بالتطابق. أيضًا، قد يظهر تعدد القيم حتى في الخطوة الأولى إذا كان $D_0 \cap D_1$ يتكون من أكثر من نطاق واحد.



شكل 3. الحالة التي يتكون فيها $D_0 \cap D_1$ من D_{01} و $\widetilde{D}_{01}$

يوضح الشكل (3) الحالة التي يتكون فيها $D_0 \cap D_1$ من النطاق D_{01} والمنطقة المظللة $\widetilde{D}_{01}$. بينما تتطابق الدالتان $f_0(z)$ و $f_1(z)$ في $z \in D_{01}$ ، فإن هاتين الدالتين لا تتطابقان بالضرورة في $z \in \widetilde{D}_{01}$، بحيث تكون $F(z) = f_0(z)$ أو $F(z) = f_1(z)$) في $z \in \widetilde{D}_{01}$ ، وتكون الدالة $F(z)$ عمومًا ذات قيمة مزدوجة.

الدالة $F(z)$ متعددة القيم (بشكل عام) هي، بحكم التعريف، "مركبة" أو "مترابطة" من عناصر أحادية القيمة، وهي الدوال المنتظمة $f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z)$. تُسمى مجموعة العناصر المُتحصل عليها من العنصر الابتدائي $f_0(z)$ بالاستمرارية التحليلية على طول متتاليات النطاقات التي تسمح بهذا الاستمرار، دالة تحليلية $F(z)$. وبالتالي، تتكون الدالة التحليلية من عناصر منتظمة (أو، كما تُسمى أحيانًا، فروعًا منتظمة). من المهم أن يُعرّف العنصر الابتدائي الدالة التحليلية بشكل وحيد.

المفهوم الأكثر ملائمة من مفهوم الاستمرارية التحليلية على طول متتالية من النطاقات هو مفهوم الاستمرارية التحليلية على طول منحنى.

3.4 الاستمرارية التحليلية على طول منحنى[4]:

نقول إن الدالة $f(z)$ المنتظمة في جوار النقطة z_0 هي عنصر عند النقطة z_0. ويُقال إن عنصرين متكافئين إذا كانا ثابتين عند نقطة معينة ومتطابقين في جوار هذه النقطة. علاقة التكافؤ بين العنصرين متعدية. فيما يلي، سنفترض أن كل عنصر يُعتبر ضمن علاقة تكافؤ. ونكون مستعدين الآن لتقديم مفهوم الاستمرارية التحليلية على طول منحنى.

تعريف4: افترض أن لدينا منحنى γ ودالة متصلة $\varphi(z)$ مُعرّفة عليه. بالإضافة إلى ذلك، لنفترض أن لكل نقطة ξ على المنحنى γ يوجد عنصر $f_\xi(z)$، وأن هذا العنصر يتطابق مع $\varphi(z)$ على قوس المنحنى γ الذي يحتوي على النقطة ξ.

عندها، يُسمى العنصر $f_{z_1}(z)$ عند نقطة النهاية z_1 لـ γ استمرارًا تحليليًا على طول المنحنى γ للعنصر $f_{z_1}(z)$ المثبت عند نقطة البداية z_0 لـ γ. ويُقال أيضًا في هذه الحالة أن العنصر $f_{z_0}(z)$ مستمر تحليليًا على طول المنحنى γ ، أو أن هذا العنصر يسمح باستمرار تحليلي على طول المنحنى γ.

ملاحظة 3: الدالة المعطاة على المنحنى γ هي دالة أحادية القيمة لنقاط γ . على وجه التحديد، إذا كان المنحنى γ معطى بالمعادلة $z = \sigma(t),\ \alpha \le t \le \beta$ ، عندئذٍ، فإن كل نقطة $z_t = \sigma(t)$ من γ تقابلها قيمة واحدة $\varphi(z_t)$ ، وهي قيمة φ عند النقطة z_t من γ. ولكن إذا كان لـ γ تقاطعات ذاتية، فإن $\varphi(z)$ كدالة لنقاط في المستوى المركب $\mathbb{Z}$ قد لا تكون أحادية القيمة.

ملاحظة 4: إذا كان العنصر $f_{z_0}(z)$ يمكن أن يستمر تحليليًا على طول γ ، فيمكن أن يستمر تحليليًا على طول متتالية من النطاقات التي تغطي γ. علاوة على ذلك، يمكن أيضًا أن يستمر $f_{z_0}(z)$ على طول أي منحنى γ' يقع بالقرب من γ وله نفس نقاط النهاية مثل γ.

على العكس من ذلك، إذا كان يمكن أن يستمر عنصر معين تحليليًا على طول متتالية من النطاقات، فيمكننا بسهولة إثبات أنه يمكن أن يستمر تحليليًا على طول أي منحنى يقع في هذه المتتالية من النطاقات.

من أهم خصائص الاستمرارية التحليلية على طول منحنى وحدانيتها.

نظرية2: الاستمرارية التحليلية لعنصر معين على طول منحنى معين تكون وحيدة.

بموجب النظرية (2)، توجد دالة تحليلية واحدة فقط مُولّدة بواسطة عنصر مُعيّن معطى. يُقال إن هذا العنصر هو بذرة الدالة التحليلية. تُولّد العناصر المتكافئة الدالة التحليلية نفسها. نطاق القيم التي تقبلها الدالة التحليلية $F(z)$ عند النقطة z يتطابق مع نطاق القيم التي تقبلها جميع عناصر الدالة.

1.3.4 بعض خصائص الاستمرارية التحليلية على طول منحنى[4]:

لنفترض أن العنصر $f_{z_0}(z)$ مستمر تحليليًا على طول منحنى $\gamma: z = \sigma(t), 0 \le t \le 1$ ، وليكن $f_t(z)$ هو العنصر المقابل عند النقطة $z_t = \sigma(t)$ من المنحنى γ. نفترض أنه يمكن تمثيل $f_t(z)$ بمتسلسلة القوى

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)(z - z_t)^n .$$

مسلمة1: نصف قطر التقارب $r(t)$ للمتسلسلة الممثلة للعنصر $f_t(z)$ إما أن يكون لانهائيًا لجميع قيم t أو دالة متصلة بالنسبة إلى t.

مسلمة2: يمكن استبدال الاستمرارية التحليلية لعنصر على طول منحنى بالاستمرارية التحليلية على طول متسلسلة محدودة من الدوائر أو الأقراص المفتوحة.

مسلمة3: إذا كان من الممكن متابعة عنصر تحليليًا على طول منحنى، فيمكن أيضًا متابعته على طول أي منحنى آخر قريب بما فيه الكفاية من المنحنى الابتدائي، وتتطابق نقطتا ابتدائه وانتهائه مع نقطتي ابتداء وانتهاء المنحنى الابتدائي. علاوة على ذلك، تتطابق العناصر عند نقطة النهاية.

كيف نفسر حقيقة أن منحنيين قريبين بما فيه الكفاية؟ لنأخذ المنحنيين $\gamma_j: z = \sigma_j(t)$ ، $0 \le t \le 1$ ، حيث $j = 1,2$. تُسمى الكمية $\max_{0\le t\le 1}|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|$ المسافة بين المنحنيين. ويُقال إن المنحنيين قريبان إذا كانت المسافة المعرفة أعلاه صغيرة.

5. الدالة $\ln z$ [4]:

1.5الاستمرارية التحليلية للدالة $\ln x$:

في مقررات التحليل الرياضي، تُدرس الدالة في $\ln x$ فقط للقيم الحقيقية الموجبة للمتغير x. من الطبيعي تعريف الدالة $\ln z$ للقيم المركبة z باعتبارها الاستمرارية التحليلية لـ $\ln x$. يمكن توسيع الدالة $\ln x$ في متسلسلة تايلور التالية:

$$\ln x = \ln[1 + (x - 1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x - 1)^n,$$

والتي تتقارب في الفترة $0 < x < 2$. لنأخذ هذه المتسلسلة لقيم z المركبة، أي نعتبر الدالة

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z - 1)^n.$$

تتقارب المتسلسلة في القرص المفتوح $K_0: |z-1|<1$، بحيث تكون $f_0(z)$ منتظمة في هذا القرص و $f_0(z)=\ln x$ عند $0<x<2$. وبالتالي، فإن $f_0(z)$ هي الاستمرارية التحليلية (الوحيدة) للدالة $\ln x$ من الفترة $0<x<2$ إلى القرص K_0.

باستخدام $\ln z$، سنشير في هذا البحث إلى دالة تحليلية مُولَّدة بواسطة العنصر $f_0(z)$ عند النقطة $z=1$.

ولتحديد المنحنيات التي يكون العنصر $f_0(z)$ على طولها قابلاً للاستمرار تحليليًا، والحصول على صيغ عملية للعنصر $f_0(z)$. يمكننا استخدام طريقة إعادة توسيع متسلسلة القوى لإجراء الاستمرار التحليلي للعنصر $f_0(z)$، أو استخدام التمثيل التكاملي

$$\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}, \quad 0<x<\infty$$

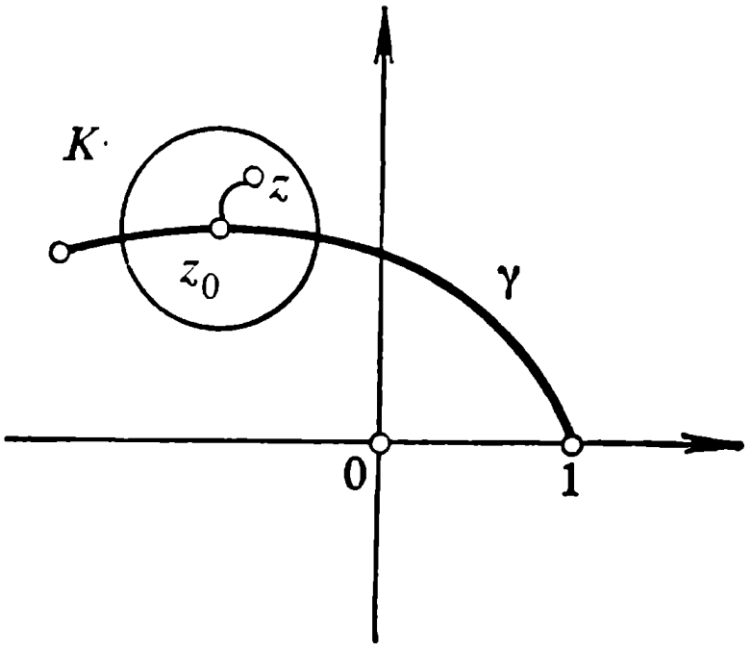
ونود معرفة ما إذا كان للعنصر الابتدائي $f_0(z)$ تمثيل تكاملي مماثل.

مُسلَّمة 4: الصيغة التالية صحيحة في الدائرة $K_0: |z-1|<1$:

$$f_0(z)=\int_1^z \frac{d\xi}{\xi},$$

حيث يُؤخذ التكامل على طول أي منحنى يقع داخل K_0.

مسلمة 5: العنصر $f_0(z)$ قابل للمتابعة تحليليًا على طول أي منحنى γ يبدأ من النقطة $z=1$ ولا يمر خلال $z=0$. كما بالشكل



شكل 4. توضيح النطاق الموصوف في المسلمة 5.

حيث K هي الدائرة التي مركزها النقطة $z_0 \in \gamma$ ، ولا تحوي النقطة $z = 0$.

لنفترض أن D نطاق في المستوى المركب الممتد، و$f(z)$عنصر عند النقطة $z_0 \in D$. لنفترض أن $f(z)$ قابلة للاستمرار تحليليًا على طول جميع المنحنيات الواقعة في D. ونتيجةً لهذا الاستمرار، نصل إلى مجموعة من العناصر، والتي نسميها دالة تحليلية في D. يؤدي هذا التعريف والمسلمة 2 إلى النظرية الآتية:

نظرية 3: الدالة $\ln z$ تحليلية في النطاق $0 < |z| < \infty$.

2.5 الخصائص الأساسية لـ $\ln z$ [4]:

من المسلمة 5، يُستنتج أن قيمة $\ln z$ عند أي نقطة $z \neq 0$ أو ∞ تُعطى بالصيغة

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}, \qquad \rightarrow \quad (1)$$

حيث يُؤخذ التكامل على طول المنحنى γ الذي لا يمر عبر 0 أو ∞ . لنحسب قيمة هذا التكامل. لدينا $\xi = re^{i\varphi}$ ، مع $r = |\xi|$. بحيث يكون

$$d\xi = e^{i\varphi}dr + ire^{i\varphi}d\varphi, \qquad \frac{d\xi}{\xi} = \frac{dr}{r} + id\varphi,$$

التكامل في الصيغة (1) هو

$$\int_{\gamma} \frac{dr}{r} + i \int_{\gamma} d\varphi = \ln|z| + i\Delta_{\gamma} \arg z \,,$$

حيث $\Delta_{\gamma} \arg z$ هو تغير السعة على طول γ . وبالتالي،

$$\ln z = \ln|z| + i\Delta_{\gamma} \arg z \,,$$

هذه هي الصيغة الرئيسية للدالة $\ln z$.

ملاحظة 5: لا تعتمد قيمة $\ln z$ على النقطة z فحسب، بل تعتمد أيضًا على المنحنى γ الذي يُؤخذ على طوله التكامل . بالمعنى الدقيق للكلمة، كان ينبغي كتابة هذه القيمة على النحو التالي $(\ln z)_{\gamma}$ أو $\ln z\ (\gamma)$. ولكن هذا الترميز ليس شائعًا، بدلًا من ذلك، سنحدد دائمًا المسار الذي سيستمر فيه العنصر الابتدائي تحليليًا.

نعود إلى الصيغة (1) ينتج عنها:

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z} .$$

مثال3: لنحسب $\ln z$ عند النقطة z_1 بإجراء الاستمرارية التحليلية للعنصر الابتدائي $f_0(z)$ على طول المنحنى γ:

(أ) γ هو القطعة $[1, i]$ و $z_1 = i$؛

(ب) γ هو نصف الدائرة $\gamma_+ : z = e^{it}$ ، $0 \le t \le \pi$ ، و $z_1 = -1$ ؛

(ج) γ هو نصف الدائرة $\gamma_- : z = e^{-it}$ ، $0 \le t \le \pi$ ، و $z_1 = -1$ ؛

الحـــــــل

في الحالة (أ) لدينا $\Delta_{\gamma} \arg z = \frac{\pi}{2}$ ، بحيث $\ln i = i\frac{\pi}{2}$. وفي الحالة (ب) لدينا $\Delta_{\gamma} \arg z = +\pi$ ، بحيث $\ln(-1) = i\pi$، بينما في الحالة (ج) $\Delta_{\gamma} \arg z = -\pi$ ، بحيث $\ln(-1) = -i\pi$.

1.2.5 خصائص إضافية للدالة $\ln z$ [4] :

(1) جميع قيم $\ln z$ عند النقطة z تُعطى بالصيغة

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z . \quad \rightarrow \quad (2)$$

هنا، $\arg z$ دالة متعددة القيم، وهي: $\arg z = (\arg z)_0 + 2k\pi i$ ، حيث $(\arg z)_0$ قيمة ثابتة للسعة، و k عدد صحيح. يمكننا أيضًا كتابة هذه الصيغة على النحو التالي:

$$\ln\left(re^{i\varphi}\right) = \ln r + i\varphi + 2k\pi\, i\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

حيث $\ln r$ عدد حقيقي.

وبالتالي، فإن $\ln z$ دالة لا نهائية القيم، أي عند كل نقطة $z \neq 0, \infty$ ، يكون لها عدد لا نهائي من القيم. الجزء الحقيقي من هذه الدالة أحادي القيمة:

$$Re\ \ln z\ =\ \ln |z|$$

لأي $z \neq 0, \infty$ ولأي قيمة لـ $\ln z$.

الصيغة (2) تعني أن

$$e^{\ln z} = z,$$

بحيث يكون $\ln z$ هو عكس e^z.

بموجب (2)، تختلف قيمتان لـ $\ln z$ عند النقطة z_0 بمقدار $2k\pi i$ حيث k عدد صحيح. هذا يؤدي إلى الخاصية المهمة التالية لـ $\ln z$.

(2) إذا كان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ عنصرين في $\ln z$ عند النقطة z_0، فإن $f_1(z) - f_2(z) \equiv 2k\pi i$ في جوار هذه النقطة، حيث k عدد صحيح.

هذا يعني أن أي عنصر من عناصر اللوغاريتم عند أي نقطة $z \neq 0, \infty$، ثابت كليًا بقيمته عند هذه النقطة. هذه العبارة غير صحيحة بصورة عامة لأي دالة تحليلية.

(3) افترض أن $f(z)$ عنصر من $\ln z$ بحيث $f(z_0) = \ln z_0$ عندئذٍ

$$f(z) = \ln z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nz_0^n}(z - z_0)^n\,.$$

المتسلسلة متقاربة في القرص $|z - z_0| < |z_0|$

لاحظ أن معاملات توسيع تايلور في الصيغة السابقة لها نفس الصيغة كما في حالة كون z و z_0 عددين حقيقيين.

سنعمم هذه الصيغة في حالة تثبيت القيمة الابتدائية لـ $\ln z$ عند نقطة ليست النقطة $z = 1$.

(4) لنفترض أننا ثبّتنا قيمة $\ln z$ عند النقطة z_0، أي أننا نعرف $\ln z_0$، ولدينا منحنى γ يربط بين النقطتين z_0 وz. ليكن $\mathrm{In}\ z$ هو قيمة اللوغاريتم عند النقطة z الناتجة عن الاستمرارية التحليلية. على طول المنحنى γ. عندئذٍ،

$$\ln z = \ln z_0 + \ln\left|\frac{z}{z_0}\right| + i\Delta_\gamma \arg z\ , \qquad \rightarrow \qquad (3)$$

يمكننا كتابة هذه الصيغة بصيغة أخرى:

$$\ln z = \mathrm{In}|z| + i[\mathrm{Im}\ (\mathrm{In}\ z_0) + \Delta_\gamma \arg z].$$

مثال4: ليكن $\ln i = i5\pi/2$، وافترض أن γ هي القطعة المستقيمة $[i, 2]$. نتابع تحليليًا عنصر اللوغاريتم، الذي يساوي $i5\pi/2$ عند النقطة i، على طول المنحنى γ. عندئذٍ، تُعطي الصيغة السابقة

$$\ln z|_{z=2} = \ln 2 + i\left[\frac{5\pi}{2} + \Delta_\gamma \arg z\right] = \ln 2 + \frac{i5\pi}{2} - \frac{i\pi}{2} = \ln 2 + 2\pi i\ .$$

3.5 نقاط التفرع للدالة $\ln z$ [4]:

قد تحتوي الدوال التحليلية متعددة القيم $\mathrm{In}\ z$ على نقاط مفردة. تُسمى هذه النقاط المفردة نقاط التفرع.

تعريف5: لنفترض أن الدالة $F(z)$ دالة تحليلية في جوار مثقوب للنقطة a، وأنها دالة متعددة القيم في هذا الجوار. عندئذٍ، تُعتبر النقطة a نقطة تفرع للدالة $F(z)$.

مثال 5: النقطتان 0 و ∞ هما نقطتا التفرع للدالة $\ln z$.

إذا كانت الدالة $F(z)$ دالة تحليلية في الحلقة $0 < |z-a| < r$. نأخذ نقطة z_0 من هذه الحلقة، والعنصر $f_0(z)$ عند هذه النقطة، ويستمر العنصر تحليليًا على طول الدائرة $|z-a| = |z_0-a|$ مع نقطتين ابتدائية ونهائية عند z_0 . (يمكن صياغة هذه العملية بإيجاز بالطريقة التالية: "نمر عبر الدائرة حول النقطة a في اتجاه موجب أو سالب، حسب اتجاه الدائرة"). إذا لم يتطابق العنصر $f_1(z)$، الناتج عن الاستمرارية التحليلية، مع العنصر الابتدائي $f_0(z)$ بعد دائرة كاملة، فإن النقطة a هي نقطة تفرع للدالة $F(z)$.

لنأخذ نقطة $z \neq 0, \infty$، والعنصر $f_0(z)$ من $\ln z$ ، ونجعل نقطة الدائرة $z = 0$ بالمعنى الموجب. إذا كان $f_1(z)$ هو العنصر المُتحصل عليه نتيجةً للاستمرار التحليلي، فعندئذ يكون لدينا

$$f_1(z) = f_0(z) + 2\pi i.$$

وهكذا، نكون قد توصلنا إلى الخاصية التالية:

(5) عند تدوير النقطة $z = 0$ في الاتجاه الموجب،

$$\ln z \to \ln z + 2\pi i.$$

أي أن عنصر $\ln z$ يزداد بمقدار $+2\pi i$. عند تدوير النقطة $z = 0$ في الاتجاه السالب،

$$\ln z \to \ln z - 2\pi i.$$

ملاحظة5: لنفترض أن الدالة $F(z)$ تحليلية في الحلقة $K: 0 < |z| < r$، وتتمتع بالخاصية التالية: عند تدوير النقطة $z = 0$ في الاتجاه الموجب، فإن

$$F(z) \to F(z) + c, \quad c \neq 0$$

(أي أن كل عنصر من عناصرها يتلقى زيادة مقدارها c). عندئذٍ

$$F(z) = \frac{c}{2\pi i}\ln z + G(z),$$

مع كون $G(z)$ منتظمة في K.

الدالة $\ln z$، كأي دالة تحليلية متعددة القيم، "مُركّبة" أو "مُدمجة" من دالة تحليلية أحادية القيمة، أي عناصرها. يُقال إن كل عنصر من عناصر الدالة $\ln z$ هو فرع منتظم من الدالة $\ln z$. وبالمثل، يُقال إن كل عنصر من عناصر الدالة التحليلية متعددة القيم هو فرع (منتظم) من الدالة. يمكن اختيار العناصر بطرق مختلفة، اعتمادًا على "تركيب" الدالة التحليلية (متعددة القيم).

باستخدام الصيغة (3) وخصائص $\arg z$ نصل إلى الخاصية التالية للوغاريتم:

(6) لنفترض أن منحنيين، γ_1 و γ_2 ، يقعان في النطاق $0 < |z| < \infty$، ويربطان النقطتين a وb، ومتماثلين في هذا النطاق. لنفترض أن $f(z)$عنصر عشوائي من الدالة $\ln z$ عند النقطة a. ونتيجةً للاستمرار التحليلي لهذا العنصر على طول γ_1 وعلى طول γ_2، نصل إلى نفس العنصر عند النقطة b.

في الواقع، فإن تغيرات السعات على طول γ_1 وγ_2 متساوية:$\Delta_{\gamma_1}\arg z = \Delta_{\gamma_2}\arg z$ ، وبالتالي، وفقًا للمعادلة (3)، فإن الاستمرارية التحليلية على طول γ_1 وγ_2 تؤدي إلى نفس قيمة اللوغاريتم عند النقطة b.

6 مفهوم سطح ريمان [4],[5]:

لشرح مفهوم سطح ريمان ندرس الدالة التحليلية $F(z)$. يُسمى الزوج $P_0 = (z_0, f_0(z))$، حيث $f_0(z)$ عنصر من $F(z)$ عند النقطة z_0، نقطة على سطح ريمان R (للدالة $F(z)$). سنفترض أن زوجين من الدوال التحليلية متعددة القيم $(z_0, f_0(z))$ و $(z_0, f_1(z))$ ، يُحددان نفس النقطة على سطح ريمان إذا كان العنصران

$f_0(z)$ و $f_1(z)$ متكافئين. تُعتبر النقطة z_0 إسقاطًا للنقطة $P_0 = (z_0, f_0(z))$ على سطح ريمان فوق المستوى المركب $\mathbb{Z}$:

$$(z_0, f_0(z)) \to z_0 .$$

تُسمى مجموعة النقاط $P = (\xi, f_0(z))$ التي يكون فيها $|\xi - z_0| < \varepsilon$ ، مع $\varepsilon > 0$ بحيث تكون $f_0(z)$ منتظمة في الدائرة $|z - z_0| < \varepsilon$ ، جواراً U_ε للنقطة $P_0 = (z_0, f_0(z))$. الدائرة $|z - z_0| < \varepsilon$ هي إسقاط الجوار U_ε فوق المستوى المركب $\mathbb{Z}$.

سطح ريمان مترابط، حيث يمكن الحصول على أي عنصرين من دالة تحليلية عن طريق استكمال عنصر تحليليًا في الآخر.

1.6 الدوال الهولومورفية على سطح ريمان [3]:

اذا كان عنصر الدالة (f, D) مستمر تحليليًا على طول كل منحنى γ ينبعث من 1 ويقع في $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. لنُشير إلى R (لـ "سطح ريمان") على إجمالي جميع عناصر دالة يتم الحصول عليها من خلال هذه الاستمراريات التحليلية. سوف نقوم بـ "تصوّر" R بمعنى ما.

لاحظ أن كل نقطة من R "تقع فوق" نقطة وحيدة من $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. يرتبط عنصر الدالة $(f, D) \in R$ بمركز D، أي أن (f, D) هو عنصر دالة عند نقطة من $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. لذا، يمكننا تعريف "إسقاط" $\pi: R \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ بواسطة

$$\pi(f, D) = \text{مركز القرص } D .$$

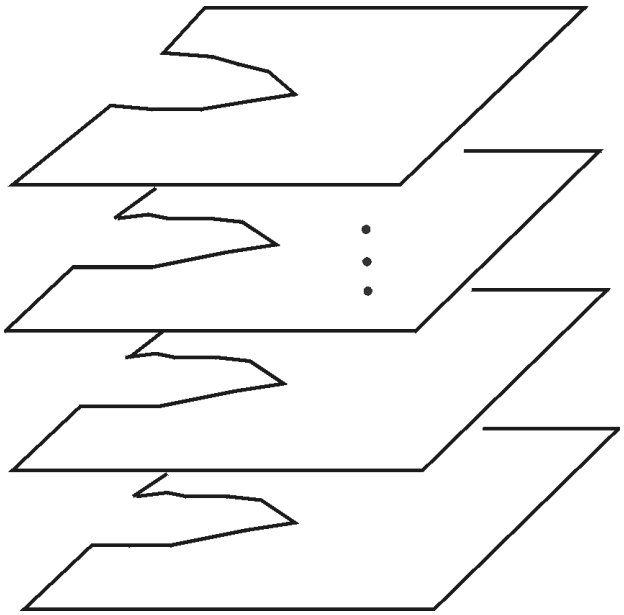
هذا المصطلح الجديد سوف نستخدمه فيما يلي

بما أن $\pi: R \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ دالة أحادية (واحد لواحد) محلياً فيمكننا استخدام هذا الإسقاط لوصف معنى أن تكون الدالة $F: R \to \mathbb{C}$ دالة هولومورفية.

بمعنى آخر، تكون F هولومورفية إذا كانت $F \circ \pi^{-1}: \pi(D) \to \mathbb{C}$ هولومورفية لكل مجموعة مفتوحة D في R حيث π واحد لواحد على D مع وضع هذا التعريف في الاعتبار، تصبح $f(z) = \sqrt{z}$ دالة هولومورفية معرفة جيدًا "أحادية القيمة" على R. بمعنى آخر، إذا كانت (f, D) عنصر دالة في R، تقع عند $P \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$، أي مع $\pi(f, D) = P$، فإننا نجعل

$$F((f, D)) = f(P).$$

بهذه الصيغة، تكون $F^2\big((f, D)\big) = \pi(f^2, D) = P$ [بما أن $f^2(z) = z$]. وبالتالي، F هي دالة الجذر التربيعي، بالمعنى الموضح (هذه الدالة هي خارج إطار هذا البحث).



شكل5. سطح ريمان لدالة الجذر النوني $\sqrt[n]{z}$

توجد صور مشابهة للدالة $\sqrt[n]{z}$ كما بالشكل (5). لاحظ أن سطح ريمان لهذه الدالة يحتوي على n من الطبقات، متصلة ببعضها البعض بالتتابع.

يمكن تمثيل سطح ريمان بيانيًا بسطح في فضاء ثلاثي الأبعاد. وفي البند التالي سنقوم ببناء سطح ريمان للدالة $\ln z$ ، والتي تعتبر هي الدالة قيد الدراسة في هذا البحث.

2.6 سطح ريمان للدالة اللوغاريتمية [4]:

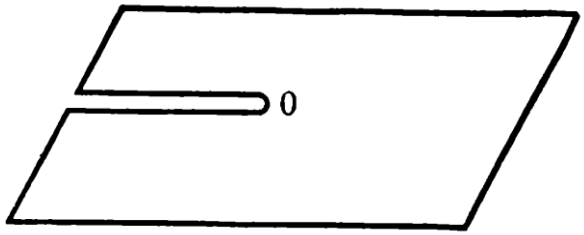
ليكن D نطاقاً بسيطًا متصلًا عشوائيًا لا يحتوي على النقطتين 0 و∞ . نعين النقطة $z_0 \in D$ ، والقيمة $\ln z_0$ عند هذه النقطة. بعد ذلك، نواصل تحليليًا العنصر $f(z)$ من $\ln z$ ، $(f(z_0) = \ln z_0)$ على طول جميع خطوط التفرع التي تبدأ من النقطة z_0 وتقع فيD. وبذلك، نكون قد أنشأنا دالة $f(z)$ تحليلية ذات قيمة واحدة في D. وينتج هذا من الخاصية 6 ومن حقيقة أن أي منحنيين يقعان في نطاق بسيط الترابط ولهما نهاية مشتركة وبداية مشتركة يكونان متماثلين. تُسمى الدالة التحليلية الناتجة ذات القيمة الواحدة فرعًا منتظمًا للوغاريتم في المجال D. إذا اخترنا قيمة أخرى للوغاريتم عند النقطة z_0، فسيكون لدينا فرع منتظم آخر لـ $\ln z$ في هذا النطاق.

لنأخذ المستوى المركب $\mathbb{Z}$ مع قطع على طول الشعاع$[0, \infty-)$ كنطاق D (الشكل 5). تنقسم الدالة $\ln z$ في هذا النطاق إلى عدد لا نهائي من الفروع. ويُعبَّر عنها بالصيغة

$$f_k(z) = \ln|z| + i(\arg z)_0 + 2k\pi i\,, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

هنا $(\arg z)_0$ هو الفرع الذي يحقق

$$-\pi < (\arg z)_0 < \pi\,.$$



شكل 6. المستوى المركب مع قطع على طول الشعاع $[0, \infty-)$.

بدلاً من دراسة عدد لا نهائي من الدوال المنتظمة (الفروع) في نطاق واحد D، يمكننا أخذ عدد لا نهائي من النسخ المتطابقة من هذا النطاق. نرمز إلى هذه النطاقات بالرمز$D_k, k = 0, \pm1, \ldots$، ونفترض أن الدالة المنتظمة (الفرع) $f_k(z)$ مُعطاة في D_k.

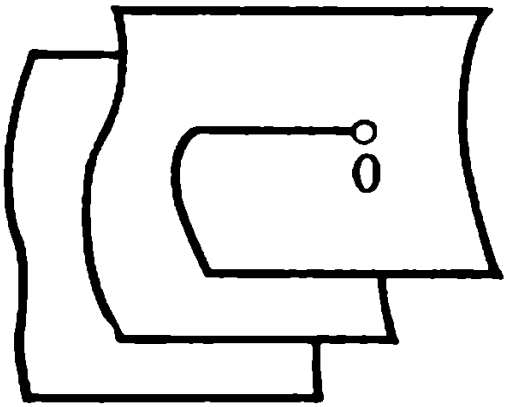
الخطوة التالية هي "لصق" D_k (الطبقات أو الطيات، كما هو معروف) في سطح واحد. ليكن l_k هو القطع على طول $[0\,, \infty-)$ على الصفيحةD_k و l_k^+ و l_k^- هما الضفتين العلوية والسفلية لهذا القطع. إذا كانت $z = x < 0$، فإن

$$f_k(x) = \ln|x| + (2k+1)\pi i, \quad x \in l_k^+\,,$$
$$f_k(x) = \ln|x| + (2k-1)\pi i, \quad x \in l_k^-\,,$$

حيث أن $(\arg z)_0 = \pm\pi$ ، $x \in l_k^{\pm}$. فإن

$$f_k(x)|_{l_k^+} = f_{k+1}(x)|_{l_{k+1}^-}\,.$$

سنلصق الصف السفلي l_{k+1}^- مع الصف العلوي l_k^+, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ عندها ستكون الدالة $\ln z$ أحادية القيمة على سطح ذي عدد لا نهائي من الصفائح كما بالشكل الآتي



شكل 7. سطح ريمان للدالة اللوغاريتمية $\ln z$

السطح الذي أنشأناه للتو في الشكل (7)، يُسمى سطح ريمان للدالة اللوغاريتمية $\ln z$ وهو يشبه درجًا حلزونيًا عاليًا للغاية. لاحظ أن سطح ريمان لـ $\ln z$ هو سطح بسيط الترابط، كما ذكرنا سابقاً.

باستخدام مفهوم سطح ريمان، يمكننا تفسير مفهوم فرع من دالة تحليلية بيانيًا.

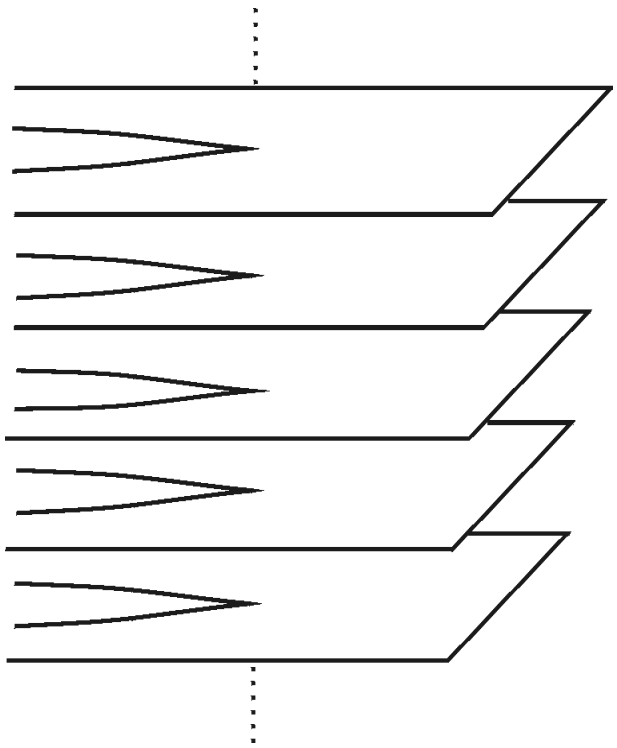
بالتحديد، يُقابل الفرع جزءًا متصلًا من سطح ريمان (والعكس صحيح أيضًا). تعني فكرة أن الدالة $F(z)$ تنقسم في D إلى m من الفروع التحليلية المتعددة، من حيث مفهوم سطح ريمان، أن جزء R المُسقط على D يتكون من m من الأجزاء المترابطة. يمكن ربط مفهوم آخر بالدالة التحليلية، وهو رسم هذه الدالة. بما أن الدالة $w = F(z)$ تتخذ قيمًا مركبة، فإن رسمها البياني يقع في فضاء رباعي الأبعاد (z, w)، حيث z وw أعداداً مركبة. رسم الدالة التحليلية $F(z)$ هو مجموعة جميع الأزواج $(z, F(z))$، حيث تُمثل$F(z)$ جميع قيم $F(z)$ عند النقطة z. وبوجه عام، هذا الرسم البياني هو سطح ثنائي الأبعاد في فضاء رباعي الأبعاد (z, w). لا يمكن أن يكون هناك تقاطعات ذاتية لهذا السطح على طول "المنحنيات"، وفقًا لنظرية الوحدانية. ومع ذلك، عند نقاط معزولة، قد تلتصق أجزاء السطح المختلفة معًا. على سبيل المثال، إذا كانت $F(z) = (z - 1)$ في z، فعند النقطة ذات الإحداثيات $z = 1$ و$w = 0$، يوجد عدد لا نهائي من أجزاء رسم هذه الدالة الملتصقة معًا.

[3] يتطلب الأمر بعض الوقت، وبعض الممارسة، للإلمام ببناء سطح ريمان من دالة معينة. وللتعود عليه أكثر، سنناقش سطح ريمان لـ "$\log z$" (بالاستفادة من المثال 2). وبشكل أدق، نبدأ بـ "الفرع الرئيسي" $re^{i\theta} \to \log r + i\theta$ المُعرَّف على $D(1 + 0i, 1/2)$ باشتراط أن $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$ ونأخذ في الاعتبار جميع استمرارياتها التحليلية على طول المنحنيات المنبثقة من 1. يمكننا تصور "الفروع" هنا

بملاحظة أنه، مرة أخرى مع (المحور الحقيقي السالب U{0}) $W = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ، $\pi^{-1}(W)$ لديه عدد لا نهائي من المكونات - كل منها نسخة من W - والتي تُطابق واحدًا لواحد على W. وهذه المكونات هي "فروع" $\log z$ على W:

$$re^{i\theta} \rightarrow \log r + i\theta + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z},$$

حيث $-\pi < \theta < \pi$. تخيل كل صورة من هذه الصور (العدد اللانهائي) مكدسة فوق بعضها البعض (الشكل 6). نربطها في شكل حلزوني لانهائي، أو لولب، بحيث تتصل الحافة العلوية للسطح k بالحافة السفلية للسطح $(k-1)$. لاحظ أن الدوران حول نقطة الأصل (محسوبًا في اتجاه عقارب الساعة في $\mathbb{C}\backslash\{0\}$) يقابل الدوران حول مستوى واحد لأعلى على السطح الحلزوني. هذا هو التمثيل الهندسي لحقيقة أنه عندما نكمل تحليليًا فرعًا من $\log r + i\theta + 2\pi ik$ مرة واحدة حول نقطة الأصل عكس اتجاه عقارب الساعة، فإن k تزداد بمقدار 1. هذه المرة لا يوجد اتصال بين "الطبقتين" الأولى والأخيرة. يستمر الحلزون بلا حدود في كلا الاتجاهين.

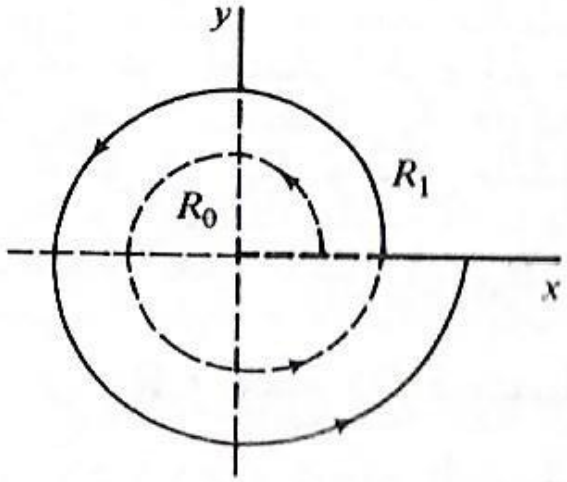


شكل 8. سطح ريمان للدالة اللوغاريتمية $\ln z$ بشكل مختلف عن الشكل 7.

[1],[2]ويمكن بناء سطح ريمان للدالة اللوغاريتمية بصورة أخرى وذلك باختيار شعاع آخر يمثل الجزء الموجب من المحور الحقيقي كما يلي

لكل عدد مركب غير صفري z يكون للدالة متعددة القيم $\log z = \log r + i\theta$ قيم مناظرة لا نهائية العدد، من أجل تصور $\log z$ كدالة وحيدة القيمة فإننا نحلل المستوى المركب ، بعد استبعاد نقطة الأصل، بسطح تتحدد عليه دائماً نقطة جديدة كلما زادت أو نقصت سعة العدد المركب بمقدار 2π أو مضاعفات صحيحة للمقدار 2π. اعتبر المستوى المركب $\mathbb{Z}$ بعد استبعاد نقطة الأصل كما لو كان طبقة رقيقة (أو طية) R_0 مشقوقة على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقي على تلك الطية أفرض أن θ تأخذ القيم من صفر إلى 2π ، افرض أن طية ثانية R_1 شقت بنفس الأسلوب ووضعت أمام الصحيفة R_0 بعد ذلك وصلت الشفة السفلى للشق في R_0 بالشفة العليا للشق R_1 فإن الجزء التخيلي للدالة $\log z$ يأخذ القيم من 2π إلى 4π بنفس الأسلوب نشق بعد ذلك طية ثالثة R_2 ونضعها أمام R_1 ونوصل الشفة السفلى للشق في R_1 بالشفة العليا للشق في هذه الطية الجديدة وهكذا نتابع هذه العملية بإضافة طيات جديدة $R_3, R_4, \ldots$، بنفس الأسلوب نشق طية أخرى نرمز لها بالرمز R_{-1} ونضعها خلف الطية R_0 ونعتبر أن الزاوية أن θ تأخذ القيم من -2π إلى صفر عليها، ثم نوصل الشفة السفلى للشق في R_{-1} بالشفة العليا للشق في R_0.

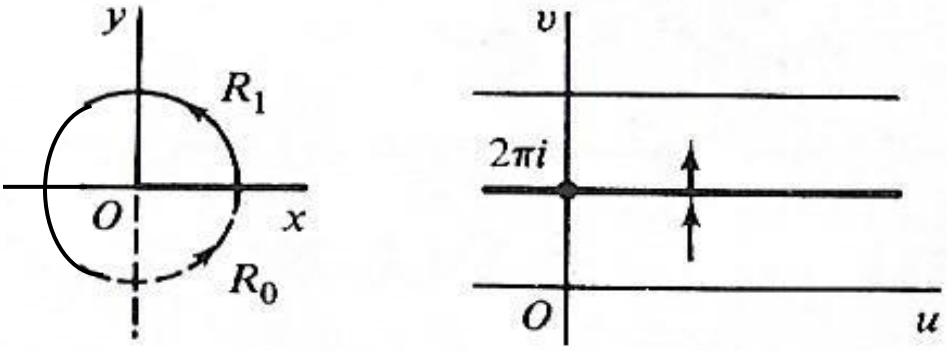
وبالمثل نتابع هذه العملية بإضافة طيات جديدة $R_{-2}, R_{-3}, \ldots$. يمكن اعتبار الاحداثيين r, θ لنقطة ما على أي طية على أنها إحداثيات قطبية لمسقط تلك النقطة على المستوى المركب الأصلي $\mathbb{Z}$، حيث يقصر مدى الاحداثي الزاوي θ لمدى محدد قيمته 2π من الزوايا النصف قطرية على كل طية. عتبر أي منحنى متصل على هذا السطح المترابط المكون من عدد لا نهائي من الطيات (أو الطبقات) عندما تتحرك نقطة ما z على هذا المنحنى فإن قيم $\log z$ تتغير تغيراً متصلاً حيث أن θ بالإضافة إلى r تتغير الأن تغيراً متصلاً وتأخذ $\log z$ قيمة واحدة فقط مناظرة لكل نقطة على المنحنى فمثلاً عندما تصنع النقطة دورة كاملة حول نقطة الأصل على الطية R_0 على امتداد المسار الموضح بالشكل (9) فإن الزاوية تتغير من صفر إلى 2π. عندما تجتاز النقطة الخط المستقيم $\theta = 2\pi$ فإنها تنتقل إلى الطية R_1 من السطح عندما تكمل النقطة دورة كاملة في R_1 تتغير الزاوية θ من 2π إلى 4π وعندما تجتاز الخط المستقيم $\theta = 4\pi$ فإنها تنتقل إلى الطية R_2.



شكل 9. الطيات R_0، R_1 المكونة لسطح ريمان

السطح الذي وصفناه هنا هو سطح من سطوح ريمان للدالة $\log z$ وهو سطح مترابط يتكون من عدد لا نهائي من الطبقات مرتبة بحيث تكون $\log z$ دالة وحيدة القيمة للنقط الواقعة عليه.

التحويلة $w = \log z$ راسم أحادي لسطح ريمان بأكمله فوق المستوى المركب w بأكمله صورة الطية R_0 هي الشريحة $0 \leq a \leq 2\pi$ عندما تتحرك نقطة z فوق الطية R_1 على امتداد القوس الموضح بالشكل (9) تتحرك صورتها w إلى أعلى عبر الخط المستقيم $v = 2\pi$ ، كما هو موضح بالشكل.



شكل 10. التحويلة $w = \log z$

لاحظ أن الدالة $\log z$ المعرفة على الطية R_1 تمثل الاستمرارية التحليلية للدالة التحليلية وحيدة القيمة:

$$\log r + i\theta, \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

إلى أعلى عبر الجزء الموجب من المحور الحقيقي بهذا المفهوم، لا تكون $\log z$ دالة وحيدة القيمة فحسب لجميع النقاط z على سطح ريمان ولكنها تكون أيضاً دالة تحليلية عند جميع النقط هناك.

ملاحظة: من الممكن أن تكون الطيات مشقوقة على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقي كما رأينا في البند السابق، أو على امتداد أي شعاع آخر يبدأ من نقطة الأصل وموصلة كما يجب على امتداد الشقوق لتكون سطح آخر من سطوح ريمان للدالة $\log z$.

الخلاصة والتوصيات:

يمكن تطبيق الفكرة التي ناقشناها، وهي بناء أسطح من عناصر دالة، بشكل عام تمامًا: لنفترض مجموعة جميع عناصر الدالة التحليلية التي يمكن الحصول عليها من خلال الاستمرارية التحليلية (على طول منحنى في $\mathbb{C}$) لعنصر دالة معين (f, D). هذا ما أسميناه سابقًا دالة تحليلية شاملة. إذن، هذه المجموعة من عناصر الدالة سُميت سابقًا دالة تحليلية شاملة. عندئذٍ، يُمكن اعتبار مجموعة عناصر الدالة هذه، في الواقع (ودائمًا) كسطح مترابط: يوجد إسقاط على مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ، يتم الحصول عليه بإرسال كل عنصر دالة إلى نقطة من $\mathbb{C}$ التي يقع عندها. هذا الإسقاط هو تعريف محلي لمجموعة عناصر الدالة بجزء من $\mathbb{C}$ ، وبالتالي يُظهر عمليًا أن مجموعة عناصر الدالة ثنائية الأبعاد، أي كسطح؛ كما رأينا في سياق هذا البحث من المناقشات والأمثلة والتي حاولنا فيها دراسة هذا الموضوع المهم والذي لا يسع المجال هنا لتغطيته بالكامل، ولكن هذا ما سمح به حيز الدراسة، ونوصي بإعداد المزيد من البحوث عن هذا الموضوع تتناول دوال مركبة أخرى غير الدالة اللوغاريتمية، على سبيل المثال دالة الجذر التربيعي، والتي لا تقل أهمية عن الدالة اللوغاريتمية، وكذلك إعداد دراسة من قبل المتخصصين في الهندسة والفيزياء النظرية لتوضيح تطبيق سطوح ريمان في هذه المجالات.

المراجع:

المراجع العربية:

[1] المتغيرات المركبة وتطبيقات ، المؤلفون: دويل ف. تشرشل ، جيمس و. براون ، روجر ف. فيرهي أساتذة الرياضيات بجامعة ميتشجان، ترجمة ومراجعة: د. بديع توفيق محمد حسن، د. اسماعيل عبدالرحمن أمين،

أساتذة الرياضيات بجامعة القاهرة ، كلية العلوم، دار ماكجروهيل للنشر ، 1948، 1960، 1974، الطبعة العربية 1982.

[2] رياضيات /3/ ، تأليف د. عصام حكمت العبد الرزاق، أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية، جامعة البعث، مراجعة: د. رشا العلي، جامعة البعث، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة البعث.

المراجع الانجليزية:

[3] Steven G. Krantz, "A Guide to Complex Variables", Palo Alto, California, October 14, 2007.

[4] Yu.V.Sidorov,M.V.Fedoryuk, and M.I.Shabunin, "Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variables, Moscow Institute of Physics and Technology, Translated from the Russian by Eugene Yankovsky, First Published 1985, Revised from the 1982 Russian edition

[5] Lars V. Ahlfors, "complex Analysis" An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable, Professor of Mathematics, Emeritus Harvard University, Third Edition, Copyright © 1979,1966 by McGraw-Hill, Inc.