معامل التأثير العربي 2.17
العدد 26

مجلة التربوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X

مجلة التربوي

مجلة علمية محكمة تصدر عن كلية التربية

بجامعة المرقب

العدد السادس والعشرين
يناير 2025م

هيئـــة التحريـر

رئيس هيئة التحرير: د. سالم حسين المدهون
مدير التحرير: د. عطية رمضان الكيلاني
سكرتير المجلة: أ. سالم مصطفى الديب

- المجلة ترحب بما يرد عليها من أبحاث وعلى استعداد لنشرها بعد التحكيم .
- المجلة تحترم كل الاحترام آراء المحكمين وتعمل بمقتضاها .
- كافة الآراء والأفكار المنشورة تعبر عن آراء أصحابها ولا تتحمل المجلة تبعاتها .
- يتحمل الباحث مسؤولية الأمانة العلمية وهو المسؤول عما ينشر له .
- البحوث المقدمة للنشر لا ترد لأصحابها نشرت أو لم تنشر .

(حقوق الطبع محفوظة للكلية)

ضوابط النشر:

يشترط في البحوث العلمية المقدمة للنشر أن يراعى فيها ما يأتي :

- أصول البحث العلمي وقواعده .
- ألا تكون المادة العلمية قد سبق نشرها أو كانت جزءا من رسالة علمية .
- يرفق بالبحث تزكية لغوية وفق أنموذج معد .
- تعدل البحوث المقبولة وتصحح وفق ما يراه المحكمون .
- التزام الباحث بالضوابط التي وضعتها المجلة من عدد الصفحات ، ونوع الخط ورقمه ، والفترات الزمنية الممنوحة للتعديل ، وما يستجد من ضوابط تضعها المجلة مستقبلا .

تنبيهات :

- للمجلة الحق في تعديل البحث أو طلب تعديله أو رفضه .
- يخضع البحث في النشر لأولويات المجلة وسياستها .
- البحوث المنشورة تعبر عن وجهة نظر أصحابها ، ولا تعبر عن وجهة نظر المجلة .

Information for authors

1- Authors of the articles being accepted are required to respect the regulations and the rules of the scientific research.
2- The research articles or manuscripts should be original and have not been published previously. Materials that are currently being considered by another journal or is a part of scientific dissertation are requested not to be submitted.
3- The research articles should be approved by a linguistic reviewer.
4- All research articles in the journal undergo rigorous peer review based on initial editor screening.
5- All authors are requested to follow the regulations of publication in the template paper prepared by the editorial board of the journal.

Attention

1- The editor reserves the right to make any necessary changes in the papers, or request the author to do so, or reject the paper submitted.
2- The research articles undergo to the policy of the editorial board regarding the priority of publication.
3- The published articles represent only the authors' viewpoints.

Inclusion Relations For K-Uniformly Starlike Functions Defined By Linear Operator

Fatma A. Alusta and Milad E. Drbuk[1]
[1] Department- Mathematics Faculty of Arts and Science - Mesllata, Elmergib University.

a b s t r a c t

In this paper, the authors investigate of the subclasses $UST, UCV, UKC, UQC,$ functions. Also, some applications involving integral operator are considered associated with the operator $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})$.

Keywords: p -valent Analytic Functions, uniformly starlike, uniformly convex, Hadamard product , linear operator.

1. Introduction.

Let $\mathcal{A}_p$ in the form

$$f(w) = w^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n w^n \quad (p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots.\}) \quad (1)$$

and $\mathcal{D} = \{w \in \mathbb{C} ; |w| < 1\}$.

Let $f \in \mathcal{A}_p$ be given by (1) and g be given by

$$g(w) = w^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n w^n \quad (p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots.\}). \quad (2)$$

The Hadamard product (or convolution) $(f * g)$ is defined by

$$(f * g)(w) = w^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n b_n w^n = (g * f)(z). \quad (3)$$

If $\mathrm{F}(w)$ and $\mathrm{C}(w)$ are holomorphic in $\mathcal{D}$, we called $\mathrm{F}(w)$ is subordinate to $\mathrm{C}(w)$, written $\mathrm{F} \prec \mathrm{C}$ or $\mathrm{F}(w) \prec \mathrm{C}(w)$, if there exists a Schwartz function $\alpha(w)$ in $\mathcal{D}$, which (by definition) is analytic in D with

$\alpha(0) = 0$ and $|\alpha(w)| < 1 \quad (w \in \mathcal{D})$

such that

$\mathrm{F}(w) = \mathrm{C}(\alpha(w))(w \in \mathcal{D})$.

If the function $\mathrm{C}(w)$ is univalent in $\mathcal{D}$, we have the following equivalence [15],[16]

$\mathrm{F}(w) \prec \mathrm{C}(w)(w \in \mathcal{D}) \Leftrightarrow \mathrm{F}(0) = \mathrm{C}(0)$ and $\mathrm{F}(\mathcal{D}) = \mathrm{C}(\mathcal{D})$.

A function $f(w) \in \mathcal{A}_p$ is said to be in the class of k-uniformly p -valent starlike functions of order γ denoted by $UST(\gamma,\beta)$ ([8],[2])if

$$Re\left\{\frac{wf'(w)}{f(w)}\right\} \geq \beta\left|\frac{wf'(w)}{f(w)} - p\right| + \gamma \quad (\beta \geq 0, 0 \leq \gamma \leq 1, \beta + \gamma \geq 0, w \in \mathcal{D}). \quad (4)$$

Replacing f in (4) by wf' we obtain the condition

$$Re\left\{1+\frac{wf''(w)}{f'(w)}\right\}\geq\beta\left|1+\frac{wf''(w)}{f'(w)}-p\right|+\gamma$$
$$(\beta\geq 0, 0\leq\gamma\leq 1, \beta+\gamma\geq 0,\ w\in\mathcal{D}) \quad (5)$$

required for the function f to be in the class $UCV(\gamma,\beta)$ of k - uniformly p -valent convex functions of order γ.

Also, a function $f(w)\in\mathcal{A}_p$ is said to be in the class of uniformly close-to-convex functions of order γ and type β denoted by $UKC(\gamma,\beta)$ if

$$Re\left\{\frac{wf'(w)}{g(w)}\right\}\geq\beta\left|\frac{wf'(w)}{g(w)}-p\right|+\gamma$$
$$(\beta\geq 0, 0\leq\gamma\leq 1, \beta+\gamma\geq 0, \quad w\in\mathcal{D}) \quad (6)$$

for some $g\in UST(\gamma,\beta)$ (see [8] and [2]), and it is said to be in the class of uniformly quasi-convex functions of order γ and type β denoted by $UQC(\gamma,\beta)$ if

$$Re\left\{\frac{(wf'(w))'}{g'(w)}\right\}\geq\beta\left|\frac{(wf'(w))'}{g'(w)}-p\right|+\gamma$$
$$(\beta\geq 0, 0\leq\gamma\leq 1, \beta+\gamma\geq 0, w\in\mathcal{D}) \quad (7)$$

for some $g\in UKC(\gamma,\beta)$ (see [8] and [13]).

Goodman[1] introduced uniformly p-valent sterlike and p-valent convex when $p=1$ and [3] when $p\geq 1, p\in\mathbb{N}$ which then were further studied by other researchers.

Setting

$$\Omega_{p,\beta,\gamma}=\left\{u+iv, u>\beta\sqrt{(u-p)^2+v^2}+\gamma, \beta\geq 0, 0\leq\gamma\leq 1\right\} \quad (8)$$

with $p(w)=\frac{wf'(w)}{f(w)}$ or $p(w)=1+\frac{wf''(w)}{f'(w)}$ and considering the functions which maps $\mathcal{D}$ on to the conic domain $\Omega_{p,\beta,\gamma}$, such that $1\in\Omega_{p,\beta,\gamma}$, we may rewrite the conditions (4) or (5) in the form

$p(w)\prec P_{p,\beta,\gamma}(w)$.

We introduce the function $P_{p,\beta,\gamma}$ as the following :

$$P_{p,\beta,\gamma}=\begin{cases}\frac{p+(p-2\gamma)w}{1-w} & (\beta=0),\\ p+\frac{2(p-\gamma)}{\pi^2}\left(log\frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}}\right)^2 & (\beta=1),\\ \frac{p-\gamma}{1-\beta^2}cos\left\{\frac{2}{\pi}(cos^{-1}\beta)i\,log\frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}}\right\}-\frac{\beta^2-\gamma}{1-\beta^2} & (0<\beta<1),\\ \frac{p-\gamma}{\beta^2-1}sin\left(\frac{\pi}{2\xi(\beta)}\int_0^{\frac{u(w)}{\sqrt{\beta}}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2\sqrt{1-\beta^2t^2}}}\right)+\frac{\beta^2p-\gamma}{\beta^2-1} & (\beta>1),\end{cases} \quad (9)$$

where $u(w)=\frac{w-\sqrt{\beta}}{1-\sqrt{\beta}w}$ and ξ is so that $\beta=\cosh\frac{\pi\xi'(w)}{4\xi(w)}$. By virtue of the Characteristics of the domains $\Omega_{p,\beta,\gamma}$ we have

$$Re(p(w))>Re\left(P_{p,\beta,\gamma}(w)\right)>\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}. \quad (10)$$

El-Ashwah and Drbuk [11],[10],[7],[5] defined the linear operator $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R}):\mathcal{A}_p\to\mathcal{A}_p$ by the following:

$$\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)=w^p+\frac{\Gamma(r+\mathcal{R}p)}{\Gamma(r+\mathcal{R}p)}\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{p+\ell+\lambda(n-p)}{p+\ell}\right)^m\frac{\Gamma(r+n\mathcal{R})}{\Gamma(r+n\mathcal{R})}r_n w^n \quad (11)$$

where $m\in\mathbb{Z}=\{\dots,-2.-1,0,1,2,\dots\}$ and $\mathcal{R}>0,\lambda\geq 0,\ell>-p,r,e\in\mathbb{C}$ be such that $Re(e-r)>0$ and $Re(r)>-\mathcal{R}p$.

It is readily from (11) that

$$\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)=\frac{r}{r+\mathcal{R}p}\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)+\frac{\mathcal{R}}{r+\mathcal{R}p}w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)' \quad (12)$$

and

$$\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)=\left(1-\frac{p\lambda}{p+\ell}\right)\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)+\frac{\lambda}{p+\ell}w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'. \quad (13)$$

Now ,we can define the following classes of analytic functions by using the operator $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}$as follows:

$$UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)=\left\{f\in\mathcal{A}_p:\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}f(w)\in UST(\beta,\gamma);w\in\mathcal{D}\right\} \quad (14)$$

$$UCV_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)=\left\{f\in\mathcal{A}_p:\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}f(w)\in UCV(\beta,\gamma);w\in\mathcal{D}\right\} \quad (15)$$

$$UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)=\left\{f\in\mathcal{A}_p:\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}f(w)\in UKC(\beta,\gamma);w\in\mathcal{D}\right\} \quad (16)$$

$$UQC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)=\left\{f\in\mathcal{A}_p:\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}f(w)\in UQC(\beta,\gamma);w\in\mathcal{D}\right\}. \quad (17)$$

We note that

$$f\in UCV(\gamma,\beta)\Leftrightarrow\frac{wf'}{p}\in UST(\gamma,\beta) \quad (18)$$

and

$$f\in UQC(\gamma,\beta)\Leftrightarrow\frac{wf'}{p}\in UKC(\gamma,\beta). \quad (19)$$

2. Preliminaries Results.

The following lemmas are required to demonstrate the primary finding.

" **Lemma 1[6]:** Let β and γ be complex constants and h be univalently convex in the unit disk $\mathcal{D}$ with $h(0)=c$ and $Re(\beta h(w)+\gamma)>0$. Let $g(w)=c+\sum_{n=1}^{\infty}b_n w^n$ be analytic in $\mathcal{D}$. Then

$g(w)+\frac{wg'(w)}{\beta g(w)+\gamma}\prec h(w)\Rightarrow g(w)\prec h(w)$."

"**Lemma 2[14]:** Let h be convex in the unit disk $\mathcal{D}$ and let $A\geq 0$. Suppose $B(w)$ is analytic in $\mathcal{D}$ with $Re(B(w))\geq A$. If g is analytic in $\mathcal{D}$ and $g(0)=h(0)$. Then
$Awg''(w)+B(w)wg'(w)+g(w)\prec h(w)\Rightarrow g(w)\prec h(w)$."

3. Inclusion Relations.

We will examine the inclusion relationships in the following results.

Theorem 1. Let $\frac{Re(r)}{\mathcal{R}}>-\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$, $\frac{p+\ell}{\lambda}>\frac{p-\gamma}{\beta+1}$ and $f\in\mathcal{A}_p$. Then
$UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)\subset UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)\subset UST_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$.

Proof. Let $f\in UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$, and set

$$p(w)=\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}\qquad(w\in\mathcal{D})\qquad(20)$$

where $p(w)=1+p_1w+p_2w^2+\cdots$ is analytic in $\mathcal{D}$, with $p(0)=p$ and $p(w)\neq 0$, for all $w\in\mathcal{D}$.

From (10), we can write

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}=\left(\frac{r+\mathcal{R}p}{\mathcal{R}}\right)\frac{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}-\frac{r}{\mathcal{R}}\qquad(21)$$

$$\left(\frac{r+\mathcal{R}p}{\mathcal{R}}\right)\frac{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}=p(w)+\frac{r}{\mathcal{R}}.\qquad(22)$$

By logarithmically differentiating both sides of the equation (22), we get

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}=\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}+\frac{wp'(w)}{p(w)+\frac{r}{\mathcal{R}}}$$

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}=p(w)+\frac{wp'(w)}{p(w)+\frac{r}{\mathcal{R}}}\prec P_{p,\beta,\gamma}(w).\qquad(23)$$

Applying lemma 1 to (23), it follows that $p(w)\prec P_{p,\beta,\gamma}(w)$, that is $f\in UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$ the first part of Theorem 1 is completed. To prove the second inclusion relationship confirmed by Theorem 1, let $f\in UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$, and put

$$q(w)=\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}\qquad(w\in\mathcal{D})\qquad(24)$$

From (13), we can write

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}=\left(\frac{p+\ell}{\lambda}\right)\frac{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}-\left(\frac{p+\ell}{\lambda}-p\right)\qquad(25)$$

$$\left(\frac{p+\ell}{\lambda}\right)\frac{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)} = q(w)+\left(\frac{p+\ell}{\lambda}-p\right). \quad (26)$$

By logarithmically differentiating both sides of the equation (26), we get

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)} = \frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)} + \frac{wq'(w)}{q(w)+\left(\frac{p+\ell}{\lambda}-p\right)}$$

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)} = q(w)+\frac{wq'(w)}{q(w)+\left(\frac{p+\ell}{\lambda}-p\right)} \prec P_{p,\beta,\gamma}(w), (27)$$

where the function $q(w)$ is analytic in $\mathcal{D}$ with $q(0)=p$. Then by lemma 1 and $Re\left(P_{p,\beta,\gamma}(w)\right) > \frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$ it follows that $q(w) \prec P_{p,\beta,\gamma}(w)$, which implies that $f \in UST_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$.

The proof of Theorem 1 is completed.

Theorem 2. Let $\frac{Re(r)}{\mathcal{R}} > -\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$, $\frac{p+\ell}{\lambda} > \frac{p-\gamma}{\beta+1}$ and $f \in \mathcal{A}_p$. Then

$$UCV_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},A,\beta,\gamma) \subset UCV_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma) \subset UCV_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma).$$

Proof. Applying (18) and Theorem 1, we observe that

$$f(w) \in UCV_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$
$$\Leftrightarrow \frac{wf'}{p} \in UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$
$$\Rightarrow \frac{wf'}{p} \in UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$
$$\Leftrightarrow f(w) \in UCV_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$

and

$$f(w) \in UCV_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$
$$\Leftrightarrow \frac{wf'}{p} \in UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$
$$\Rightarrow \frac{wf'}{p} \in UST_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$
$$\Leftrightarrow f(w) \in UCV_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$

which evidently proves Theorem 2.

Theorem 3. Let $\frac{Re(r)}{\mathcal{R}} > -\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$, $\frac{p+\ell}{\lambda} > \frac{p-\gamma}{\beta+1}$ and $f \in \mathcal{A}_p$. Then

$$UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma) \subset UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma) \subset UKC_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma).$$

Proof. Let $f \in UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$. Then , from the definition of $UKC(\gamma,\beta)$ there exists a function $\psi(w) \in UST(\gamma,\beta)$ such that

$$Re\left\{\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\psi(w)}\right\} \prec P_{p,\beta,\gamma}(w) \qquad (w \in \mathcal{D}).$$

Choose the function $g(w)$ such that $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})g(w) = \psi(w)$, so we have

$$Re\left\{\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})g(w)}\right\} \prec P_{p,\beta,\gamma}(w) \qquad (w \in \mathcal{D}). \qquad (28)$$

Now, we set

$$p(w) = \frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)} \qquad (29)$$

where $p(w) = 1 + p_1 w + p_2 w^2 + \cdots$ is analytic in $\mathcal{D}$, with $p(0) = p$ and $p(w) \neq 0$, for all $w \in \mathcal{D}$.

From (12), we can write

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})g(w)} = \frac{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})(wf'(w))}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})g(w)}$$

$$= \frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})(wf'(w))\right)' + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})(wf'(w))}{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)\right)' + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)}$$

$$= \frac{\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})(wf'(w))\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)} + \frac{\left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})(wf'(w))}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)}}{\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)} + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)}. \qquad (30)$$

Since $g(w) \in UST_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$, and by Theorem 1, we can write $\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)} = r(w)$, where $Re\{r(w)\} > 0, (w \in \mathcal{D})$,

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})g(w)} = \frac{\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})(wf'(w))\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)} + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)p(w)}{r(w) + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)} \qquad (31)$$

From (29), we consider that

$$w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)' = \mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)p(w) \qquad (32)$$

differentiating both sides of (31) with respect to w and divided by $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)$, we have

$$w\left[w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'\right]' =$$
$$\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)\left(wp'(w)\right) + p(w)w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)\right)'$$

$$\frac{w\left[w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'\right]'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)} = wp'(w) + r(w)p(w). \qquad (33)$$

Using (31) and (33), we obtain

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R})g(w)} = \frac{wp'(w) + r(w)p(w) + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)p(w)}{r(w) + \left(\frac{a}{A}\right)}$$

$$= p(w) + \frac{wp'(w)}{r(w)+\left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)}. \qquad (34)$$

From (28) and (34), we conclude that

$$p(w) + \frac{wp'(w)}{r(w) + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)} \prec P_{p,\beta,\gamma}(w). \qquad (35)$$

Putting $\mathcal{D} = 0$ and $B(w) = \frac{1}{r(w)+\left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)}$, web obtain

$$Re\{B(w)\} = \frac{1}{\left|r(w) + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)\right|^2} Re\left[r(w) + \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)\right] > 0,$$

therefore, the inequality (35) satisfies the conditions required by lemma 2. Hence $p(w) \prec P_{\beta,\gamma}(w)$, so that $f \in UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$.

To prove the second inclusion relationship confirmed by Theorem 3, using arguments similar to those detailed above with equation (13),we obtain

$UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma) \subset UKC_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$.

Thus, the proof of Theorem 3 is completed.

Theorem 4. Let $\frac{Re(r)}{\mathcal{R}} > -\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$, $\frac{p+\ell}{\lambda} > \frac{p-\gamma}{\beta+1}$ and $f \in \mathcal{A}_p$. Then

$UQC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma) \subset UQC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma) \subset UQC_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$.

Proof. Applying (19) and Theorem 3, we observe that

$f(w) \in UQC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$

$\Leftrightarrow \frac{wf'}{p} \in UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r+1,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$

$\Rightarrow \frac{wf'}{p} \in UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$

$\Leftrightarrow f(w) \in UQC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$

and

$f(w) \in UQC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$

$\Leftrightarrow \frac{wf'}{p} \in UKC_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$

$\Rightarrow \frac{wf'}{p} \in UKC_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$

$$\Leftrightarrow f(w) \in UQC_{\lambda,\ell}^{m+1,p}(r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$$

which evidently proves Theorem 2.

Next, we study the closure properties of generalized Bernardi integral operator ([12],[9] and [4]) defined by:

$$\mathcal{L}_{c,p}f(w) = \frac{c+p}{w^c}\int_0^w t^{c-1}f(t)dt \qquad (c > -p). \qquad (36)$$

Theorem 5. Let $c > -\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$ and $f \in \mathcal{A}_p$. If $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w) \in UST(\gamma,\beta)$, then

$$\mathcal{L}_{c,p}\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right) \in UST(\gamma,\beta).$$

Proof. From (36), and the linear operator $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)$, we have

$$w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)' = (c+p)\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w) - c\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\left(\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right) \quad . \qquad (37)$$

Setting

$$p(w) = \frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\left(\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)}$$

where $p(w) = 1 + p_1 w + p_2 w^2 + \cdots$ is analytic in $\mathcal{D}$, with $p(0) = p$ and $p(w) \neq 0$, for all $w \in \mathcal{D}$.

From (37), we have

$$p(w) = (c+p)\frac{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\left(\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)} - c. \qquad (38)$$

By logarithmically differentiating both sides of the equation (38), we have

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)} = \frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\left(\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)} + \frac{wp'(w)}{p(w)+c}$$

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)} = p(w) + \frac{wp'(w)}{p(w)+c} \prec P_{p,\beta,\gamma}(w).$$

Since $Re\{P_{p,\beta,\gamma} + c\} > 0$, then by applying Lemma 1, we obtain the result .

Theorem 6. Let $c > -\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$ and $f \in \mathcal{A}_p$. If $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w) \in UCV(\gamma,\beta)$, then

$$\mathcal{L}_{c,p}\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right) \in UCV(\gamma,\beta).$$

Proof. Consider the following

$$f(w) \in UCV(\gamma,\beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{wf'}{p} \in UST(\gamma,\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{w(\mathcal{L}_{c,p}f(w))'}{p} \in UST\ (\gamma,\beta)$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}_{c,p}f(w) \in\ UCV\ (\gamma,\beta)$$

the proof is completed.

Theorem 7. Let $c > -\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$ and $f \in \mathcal{A}_p$. If $\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})f(w) \in UKC(\gamma,\beta)$, then $\mathcal{L}_{c,p}\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right) \in UKC(\gamma,\beta)$.

Proof. Let $f \in UKC^{m,p}_{\lambda,\ell}\ (r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$. Then , from the definition of $UKC\ (\gamma,\beta)$ there exists a function $\psi(w) \in UST(\gamma,\beta)$ such that

$$Re\left\{\frac{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\psi(w)}\right\} \prec P_{p,\beta,\gamma}(w) \qquad (w \in \mathcal{D}).$$

Choose the function $g(w)$ such that $\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})g(w) = \psi(w)$, so we have

$$Re\left\{\frac{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})g(w)}\right\} \prec P_{p,\beta,\gamma}(w) \qquad (w \in \mathcal{D}). \qquad (39)$$

Now, we set

$$p(w) = \frac{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})g(w)} \qquad (40)$$

where $p(w) = 1 + p_1 w + p_2 w^2 + \cdots$ is analytic in $\mathcal{D}$, with $p(0) = p$ and $p(w) \neq 0$, for all $w \in \mathcal{D}$.

From (35) we have

$$\frac{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})g(w)} = \frac{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})(wf'(w))}{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})g(w)}$$
$$= \frac{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}(wf'(w))\right)' + c\,\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}(wf'(w))}{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)\right)' + c\,\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)}$$
$$= \frac{\frac{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}(zf'(w))\right)'}{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)} + \frac{c\,\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}(wf'(w))}{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)}}{\frac{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)\right)'}{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)} + c}. \qquad (41)$$

Since $g(w) \in UST^{m,p}_{\lambda,\ell}\ (r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$, and by Theorem 5, we have $\mathcal{L}_{c,p}g(w) \in UST^{m,p}_{\lambda,\ell}\ (r,e,\mathcal{R},\beta,\gamma)$.

Setting

$$\frac{w\left(\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)\right)'}{\mathcal{J}^{m,p}_{\lambda,\ell}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)} = H(w). \qquad (42)$$

Also, we can define $h(w)$ by

$$w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)' = \mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(a,c,A)\mathcal{L}_{c,p}g(w)[h(w)], \qquad (43)$$

differentiating both sides of (43) with respect to w and divided by $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)$, we have

$$w\left[w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)'\right]' =$$
$$\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)\left(wh'(w)\right) + h(w)w(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w))'$$

$$\frac{w\left[w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}f(w)\right)'\right]'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})\mathcal{L}_{c,p}g(w)}$$
$$= wh'(w) + h(w)H(w) \quad . \qquad (44)$$

Using (41) and (44), we obtain

$$\frac{w\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right)'}{\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})g(w)} = \frac{wh'(w) + h(w)H(w) + ch(w)}{H(w)+c}$$

$$= h(w) + \frac{wh'(w)}{H(w)+c}. \qquad (45)$$

From (39) and (45), we conclude that

$$h(w) + \frac{wh'(w)}{H(w)+c} \prec P_{p,\beta,\gamma}(w). \qquad (46)$$

Putting $\mathcal{D} = 0$ and $B(w) = \frac{1}{H(w)+c}$, we obtain $Re\{B(w)\} > 0$, if $c > -\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$, therefore, the inequality (35) satisfies the conditions required by Lemma 2. Hence $p(w) \prec P_{p,\beta,\gamma}(w)$, so, the proof is completed.

Theorem 8. Let $c > -\frac{\beta p+\gamma}{\beta+1}$ and $f \in \mathcal{A}_p$. If $\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w) \in UQC(\gamma,\beta)$, then $\mathcal{L}_{c,p}\left(\mathcal{J}_{\lambda,\ell}^{m,p}(r,e,\mathcal{R})f(w)\right) \in UQC(\gamma,\beta)$.

Proof. We can prove this theorem as we proved Theorem 7.

4. References.

[1] A.W.Goodman, On uniformly starlike functions, J.Math. Anal.Appl.,155(1991),364-370.
[2] F.M. Al- Oboudi, Generalized uniformly close-to-convex functions of order γ and type β; Hacettepe J. Math. Stat., 43 (2014), no. 2, 173-182.
[3] H.A.Al-Kharsani and S.S.Al-Hajiry, Subordination results for the family of uniformly convex p-valent functions,J.inequal. pure and Appl.math.,7(1)(2006),ART 20.
[4] H. Saitoh, S. Owa, T. Sekine, M.Nunokowa and R.Yamakawa, An application of certain integral operator, Appl. Math. letters, 5(1992) , 21-24.
[5] Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 301, John Willey & Sons, Inc. New York; 1994.
[6] P.Eeinigenburg, S.S.Miller, P.T.Mocanu and M.D.Reade, General In-

equalities, 64 (1983), (Birkhauseverlag-Basel) ISNM,339-348.
[7] Prajapat JK. Subordination and super ordination preserving properties for generalized multiplier transformation operator. Math. Comput. Modelling. 2012;55:1456-1465.
[8] R. Aghalary and GH. Azadi, The Dziok- Srivastava operator and k- uniformly starlike functions, J. Inequal. Pure Appl. Math, 6 (2005), no. 2, Art. 52, 1-7.
[9] R. J. Libera, Some classes of regular univalent functions, Proceedings of the American Math. Soc., 135 (1969), 429- 449.
[10] R. M. EL-Ashwah and M. E. Drbuk, Inclusion relationship for uniformly certain classes of analytic functions, Int. J. Open Problems Complex Analysis, 7 (2015), no. 1, 1-18.
[11] R. M. EL-Ashwah and M. E. Drbuk, Subordination properties of p-valent functions defined by linear operators, British J. Math. Comput. Sci. 4(21) (2014), 3000-3013.
[12] S.D. Bernardi, Convex and starlike univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 135 (1969), 429-446.
[13] S. Kumar and C. Ramesha, Subordination properties of uniformly convex and uniformly close to convex functions, J. Ramanujan Math. Soc., 9(1994), no. 2, 203-214.
[14] S.S.𝑤Miller and P.T. Mocanu, Differential subordination and inequalities in the compelex plane, J.differential equations,67(1978),199-211
[15] S. S.Miller and P. T.Mocanu, Differential subordinations and univalent functions, Michigan Math. J., 28(1981), no. 2, 157–172.
[16] S. S. Miller and P. T. Mocanu, Differential Subordinations: Theory and Applications, Series on Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 225, Marcel Dekker, New York and Basel, 2000

معامل التأثير العربي 2.17 لسنة 2024
العدد 26 يناير 2025

مجلة التربوي
Journal of Educational
ISSN: 2011- 421X
Arcif Q3

الفهـــرس

ر.ت	عنوان البحث	اسم الباحث	الصفحة
1	Database Security Issues and Challenges in Cloud Computing (Review)	Hajer Mohammed farina Salem Husein Ali Almadhun Aimen M. Rmis Ramadan Faraj Swese	1-9
2	جماليات الاقنعة والرموز الافريقية	حسين ميلاد أبوشعالة	10-23
3	الإمكانيات المائية في منطقة مسلاته وأهم المشكلات التي تواجه قطاع المياه فيها	رجعة سعيد محمد الجنقاوي عائشة مصطفى المقريف الهام محمد علي أبوستالة	24-35
4	تأثير الذكاء الاصطناعي في تقليل تكلفة البناء الحديث	رضا الصادق الرميح عصام امحمد الرثيمي عبدالرحمن عبدالسلام المنفوخ	36-42
5	الخطاب الموجه إلى الرسول صلى الله عليه وسلم دراسة نحوية وصرفية وبلاغية لآيات مختارة من القرآن الكريم	زهرة أحمد يحيى نورية عمران أبو ناجي	43-60
6	الأصول الدعوية للتصوف وأثرها في تقويم السلوك	سالم مفتاح إبراهيم بعوه إسماعيل عاشور عبدالله بن صليل	61-70
7	دراسة السعة الحرارية لنظام فيريمغناطيسي مختلط من الرتبة(5/2 و 7/2) باستخدام نظرية المجال المتوسط	محمد يوسف اقنيبر سعاد علي محمد الشكيوي	71-82
8	بعض الأسباب الاجتماعية المؤدية للطلاق في المجتمع الليبي "دراسة ميدانية بمدينة الخمس"	فتول سالم الله عبد سعيدة	83-96
9	تنمية المهارات الحسابية باستخدام لعبة تعليمية إلكترونية للصف الأول الابتدائي (تطبيق فلاش للعمليات الحسابية أنموذجًا)	عائشة حسن حويل	97-104
10	قوة النص في ارتباطه بالمعنى في قوله تعالى:﴿وخضتم كالذي خاضوا﴾ أنموذجًا دراسة تحليلية وصفيّة	عبد الرحمن بشير الصابري إبراهيم عبد الله سويسي أبوبكر أحمد الصغير سالم علي سالم شخطور	105-112
11	مفهوم الدولة عند هيجل	عبد المنعم امحمد سالم	113-121
12	Beyond the Screen: Challenges Faced by English as Second Language (ESL) Tutors in Teaching Online ESL to Koreans	عبد المهيمن الحصان	122-131
13	التنمر المدرسي وعلاقته ببعض المتغيرات لدى طلاب المرحلة الثانوية: دراسة إمبيريقية	عثمان علي أميمن	132-154
14	اختلاف النحاة في إعراب بعض آيات من سورة البقرة وأثره على المعنى	عبد المولى محمد الدبار	155-163
15	تدبّر وبيان، في لفظة اقرأ في القرآن	علي عبد الرحمن إبراهيم الفيتوري	164-168
16	Enhancing Critical Thinking and Learning Outcomes Through Flipped Classroom Strategy in Biology Education	Hind Mohammed Aboughuffah Fenny Roshayanti Siti Patonaha	169-172
17	الرؤية السّردية في رواية نزيف الحجر لإبراهيم الكوني	علي سلامة العربي نوارة صالح موسى عمر حسين أبوغرارة	173-179
18	مفهوم الذات وعلاقته بالتوافق النفسي لدى طلبة التعليم الثانوي	فتحية على جعفر	180-187
19	الأسس الشرعية لدور الشباب في ترسيخ ثقافة التسامح لتحقيق الأمن والسلم في المجتمعات	فرج الصديق علي إشميلة	188-193
20	علاقة ممارسة النشاط البدني الرياضي باضطرابات الاكل لدى مريضات السكري ببعض مراكز المرأة بطرابلس	لطفية علي الكيب ربيعة المبروك سويسي	194-205
21	تحديد العوامل المؤثرة في نسبة الأكسجين لمصاب فيروس كورونا (كوفيد 19) باستخدام نموذج الانحدار الخطى المتعدد	مروة الهادي أحمد الصاري هديل عبد الفتاح أبو بكر حمير أميرة صالح مفتاح التريكي	206-213
22	البلاغة بين الأصالة والتأثر (الترجمة) وعلاقتها بتطور الفكر البلاغي	ملاك حسن القاضي	214-221
23	دور القيادة الالكترونية في تحسين أداء العاملين دراسة ميدانية علي العاملين بصندوق الضمان الاجتماعي فرع سوف الجين- بني وليد-ليبيا	ميلاد سالم المختار مغراف	222-232

24	استخدام الحوسبة السحابية لتطوير خدمات المعلومات في المكتبات الجامعية	خيرية عبد السلام عامر ناصر مختار كصارة	233-243
25	الاختبارات التحصيلية وأهميتها في العملية التعليمية	نجاة محمد المرابط نجاة صالح يحي	244-250
26	Sing, Learn and Grow; The benefits of English Educational Songs in the Nursery stage	Najah Abduallah Albelazi Milad Ali Abdoalsmee	251-260
27	دور مواقع التواصل الاجتماعي في التغييرات السياسية في المنطقة العربية	نعيمة رمضان محمد أبو ناجى	261-275
28	Detections of The Presence of Aflatoxin Secreted Fungi in Some Foods Traded in The Markets of The City of Al Khums, Libya	Zuhra Bashir Trabalsiy Nuri Salem Alnaass Mabruka Hadya Abubaira	276-283
29	مستوى الوعي البيئي لدى أساتذة وطلاب كلية الآداب والعلوم قصر الأخيار بظاهرة الاحتباس الحراري	حنان عيسى الراشدي نادية عبدالله التواتي الحرابي وفاء عتيق عتيق	284-300
30	الغزل الأنثوي " عُلية العباسية أنموذجاً"	عطية صالح علي الربيقي	301-312
31	Foreign Language Planning: A Case Study of Program Planning at the Faculty of Languages and Translation at Misrata University	Abdalkareem Abdalsalam Benmustafa Najah Abdalhamid Aljoroushi	313-318
32	The Effectiveness of Implementing Language-Based Approaches to Enhance EFL Students' Literary Competence: A Case Study of Teachers at the Faculty of Education, Elmergib University, Libya	Abdussalam Ali Faraj Mousa Hamza Ali Zagloom	319-333
33	Design a model for Teaching Management Information Security System in various faculties of Libyan Universities	Ali Ali Milad Mohammed Abuojaylah Albarki Aimen Abdalsalam Kleeb	334-339
34	Dimension Functions On Topological Spaces	Ali S R Elfard	340-350
35	Calculate Petrophysics Properties for Gir Formation (Facha Member) in Dahab Field- NC74, Sirte Basin	Abduladiem Yousef	351-358
36	Certain Subclasses of Analytic Functions Defined By Using New Integral Operator	Ebtisam. A. Eljamal Huda Ali Aldweby Entesar .J. Sabra	359-362
37	Study efficiency of biosorbent materials (pomegranate and fig leaves) in removing of Zinc from aqueous solution	Fathi Abuojaylah Abo-Aeshah	363-367
38	Inclusion Relations For K-Uniformly Starlike Functions Defined By Linear Operator	Fatma A. Alusta Milad E. Drbuk	368-378
39	Study of Pantoprazole and Omeprazole to Effect in the Treatment of Acute Gastric Ulcers and Reflux Esophagitis	Ebtehal El-Ghezlani Fatma Kahel	379-393
40	الألعاب الالكترونية وأثرها على ممارسة السلوك العدواني لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية من وجه نظر الأمهات المعلمات. (دراسة ميدانية على بعض المدارس الابتدائية بالفرع الغربي بمدينة زليتن)	ناجي سالم عبد السلام السفاقسي محمود محمد محمود زربيط	394-400
41	Mineral Precipitation Aspects within Sidi-Essaid Formation (Upper Cretaceous) Located at Sidi-Bujdaria Village, Wadi Gherim, Ghanema, NW Libya.(Part-1)	Ismail Elforjani Shushan Salah Eldin M. Elgarmadi Emad Eldin A. Dagdag	401-415
42	The Difficulties Facing Undergraduate Students in Writing Research Graduation Projects. Students' / Teachers' Perceptions and Attitudes	Khiri Saad Elkut	416-426
43	Proverbes français et leur traduction en arabe au niveau grammatical et sémantique.	Moamer Mohamed Attallah	427-438
44	استخدام نظام تنبيه وتسجيل المخاطر في المصرف الاسلامي الليبي (فرع الخمس)	Salaheddin Salem A.Elheshk Najla Mokhtar Elmusrati Abdalftah ali m. Abuaysha	439-451
45	أثر اللون في الشعر العربي (بشار بن برد أنموذجا)	محمد فتحي محمد قدقود	452-458
46	أثر المحددات المباشرة على الخصوبة في ليبيا للسنوات 2007،2014	أسماء إشتيوي العيان فاطمة علي التير سميرة عمر الدوفاني	459-470
47	أثر اللغة التركية في اللهجة الليبية	الصادق سالم حسن عبد الله	471-481

48	بعض آراء الأخفش النحوية في باب المرفوعات	الطاهر سالم العامري عائشة فرج القطاع سهام عادل القطاع	482-495
49	دقة المفردة القرآنية في الدلالة على الأحكام التشريعية (مفردات من آيات النكاح والحدود أنموذجاً) "دراسة فقهية مقاصدية"	الوليد سالم إبراهيم خالد	496-504
50	القصة الشعرية في شعر المعتمد بن عباد	أمنة جبريل سليمان المسلاتي	505-517
51	On Some Types of Dense Sets in Topological Spaces	AMNA M. A. AHMED	518-525
52	أثر استراتيجيات إدارة الأزمات الحديثة على الأداء الوظيفي من وجهة نظر القيادات الإدارية لشركة الأهلية للإسمنت المساهمة	أميرة عبدالله الطوير	526-540
53	أساليب المعاملة الوالدية ودورها في إحداث المرونة النفسية لدى الابناء	أميمة سعد اللافي فاطمة يوسف اخميرة	541-547
54	أسلوب تحليل الانحدار الخطي لدراسة أثر الحكومة المؤسسية على الحد من الفساد الاداري	إنتصار علي ارهيمة وفاء محمد محمد العبيد	548-561
55	دراسة إحصائية لتنبؤ بأعداد مرضى السكر باستخدام منهجية بوكس وجنكيز (دراسة تطبيقية)	إيمان حسين عبد الله علي بشير معلول حنان إبراهيم البكوش	562-571
56	تحليل معدلات ظاهرة البطالة في منطقة المرقب عن العامين (2013 – 2022م)	تهاني محمود عمر خرارزة	572-580
57	منهج الشيخ عبدالسلام أبو ناجي في بيان أدلة الأحكام من خلال كتابه أصول الفقه	جمال محمد الفطيسي	581-590
58	تحليل مطيافية التشتت الخلفي لراذرفورد لزراعة الفضة على كربيد السيليكون متعدد البلورات	حميدة على عمر ابوراس	591-593
59	أسباب ظاهرة التنمر المدرسي من وجهة نظر الأخصائي الاجتماعي، والمرشد النفسي في بعض مدارس التعليم الأساسي	حنان سعيد علي سعيد عائشة سالم اطبيرجة عفاف محمد بالحاج	594-606
60	"إذَنْ" في اللغة العربية	حواء بشير عمر بالنور	607-611
61	العنف ضد المرأة من منظور نفسي	خيرية عمران كشيب	612-622
62	واقع التعليم الالكتروني في مؤسسات التعليم العالي بين (طموحات التفعيل - التحديات)	عبدالحميد مفتاح ابو النور حنان فرج ابو على	623-630
63	مفهوم السلطة السياسية عند ميكافيللي(دراسة تحليلية نقدية)	نور الدين سالم رحومه قريبع	631-638
64	دراسة التغيرات الوظيفية في كبد وكلى ذكور الارانب المعاملة بعقار الأيبوبروفين Ibuprofenومدى التأثير الوقائي المحتمل لزيت الزيتون Olive Oil	يونس مفتاح الزايدي وليد فرج نعيمات محمد اسماعيل ابوصلاح أحمد علي إبراهيم البكوش ابوبكر الشريف الشبيلي	639-650
65	ظاهرة البطالة في المجتمع الليبي ودور الخدمة الاجتماعية في التعامل معها	بنور ميلاد عمر العماري	651-659
66	أثر رأس المال البشري على ربحية المصارف التجارية دليل تجريبي من المصارف التجارية العاملة في الأردن	خالد محمد الشريف	660-669
67	في ترشيد الفكر ومحاربة التطرف الفكري دور الوسطية	عبدالحميد إبراهيم سلطان	670-680
68	المرونة المعرفية للمرشد التربوي ودورها في نجاح العملية التعليمية	مها المصري محمد أبورقيقة	681-693
69	Case Study: Investigating The Effect of Teaching Prewriting stage on Students' Writing Quality	عبدالخالق محمد الربيعي	694-706
70	الظروف التي تضاف إلى الجمل وجوباً "بناؤها واستعمالاتها"	زينب محمد العجيل أبوراس	708-714
71	Considering the impact of peer observation on teacher's development	سناء امحمد السائح معتوق	715-722
72	التعريف بالطفيليات التي تصيب أسماك الهامور الداكنة (Epinephelus marginatus) المصطادة من شواطئ مدينة الخمس - ليبيا	عطية رمضان الكيلاني عبدالسلام صالح أبوسديل ميلود الصيد الشافعي	723-729
73	"التوافق بين شيخ الإسلام ابن تيمية ومحققي الأحناف في المسائل المتعلقة بالإيمان بالله وتوحيد الألوهية: جمعا ودراسة"	مختار حسين حسن محمد حسن ماخذي	730-742
74	حكم الاتجار بماء زمزم واستخدامها في إزالة النجاسة وما يتعلق بها من آداب	سليمان امحمد بن عمر	743-758

759-771	Ragb O. M. Saleh	Simulation and Comparison of Control Messages Effect on AODV and DSR Protocols in Mobile Ad-hoc Networks	75
772-777	Ghayth M. Ali Ilyas A. Salem Fathalla S. Othman Abdulati Othman Aboukirra Ayiman H. Abusaediyah Ashraf Amoura	INVESTIGATING THE EFFECT OF ALKALINE TREATMENT ON THE PHYSICAL CHARACTERISTICS OF HAY-EPOXY COMPOSITES	76
778-785	نهلة أحمد فرج محمود أحمد أدم عبد الكريم عيسى	تحسين أداء الشبكة المحلية (LAN) بكلية العلوم صبراتة باستخدام الشبكة المحلية الظاهرية (VLAN)	77
786-791	Reem Amhemmed Masoud	Evaluation of the efficacy of leave Extract of Ziziphus spina-Christi against three Bacterial species	78
792-799	Ruwida M. Kamour Zaema A. El Baroudi Taha H.Elsheredi	Saffron Adulteration: Simple Methods for Identification of Fake Saffron	79
800-813	فريال فتحي محمد الصياح	مدى ممارسة معلمي القسم الادبي للكفايات التعليمية الضرورية لتدريس مادة علم النفس العام في المرحلة الثانوية لبعض مدارس تعليم الساحل الغربي	80
814-824	سعاد صالح بلقاسم ايناس محمد ميلاد	استخدام مواقع التواصل الاجتماعي في العملية التعليمية ومدي فاعليتها لدى الطلبة (دراسة ميدانية على طلبة كلية تقنية المعلومات الخُمس /بلدية الخُمس (الواتساب نموذجا)	81
825-832	ذكريات عبد المولى سالم العيساوي	حل مشكلة التخصيص الضبابي بطريقة التصنيف للأعداد الضبابية الرباعية	82
833-851	عباس رجب عبدالرحيم	النظام البازيليكي للكنائس البيزنطية دراسة أثرية تطبيقية للكنيسة الشرقية بقورينا "شحات"	83
852-860	محمد نجم الهدى	المكتبات الرقمية ودورها في نشر علوم السنة النبوية: دراسة تحليلية	84
861-875	Munera Shaili Asaki	Using electronic resource mobilization to develop mathematical thinking skills among higher institute students.	85
876-881	Hend ALkhamaesi ALmabrouk ALhireereeq	Evaluation of some Chemical components of the ground water in four regions of Tourist area	86
882-905	مبروكة سعد أحمد علي	المخاطر العقدية في الإعلام الغربي وإهانته للمقدسات الإسلامية وموقف الإسلام من ذلك	87
906-924	صالح رجب أبوغفة	دراسة اضطرابات النطق وعلاقتها بالخجل الاجتماعي لدى الأطفال ودور الاختصاصي الاجتماعي في الحد منها (دراسة ميدانية بمدرسة الصم والبكم وضعاف السمع بمدينة زليتن)	88
925-935	نور الهدى نوري مجير	عناية أهل الأَنْدَلُس بالنظافة وصحة البيئة	89
936-950	عبد الرؤوف محمد عبد الساتر الذرعاني	كان وأخواتها في الشعر العربي (ديوان المعتمد بن عباد أنموذجا)	90
952-957	حنان عبد السلام علي سليم سعاد إبراهيم الهرم	توظيف الأنظمة الالكترونية في المجال الصحي (إنشاء نظام الكتروني لأحد صيدليات مدينة زليتن)	91
958-977	محمد زكريا	" نماذج من أحاديث كتاب الفِرْدَوْسِ بِمَأْثُورِ الخِطَابِ " لِأَبِي شُجَاعٍ، شِيْرُوْيَه بْنُ شَهْرَدَار الدَّيْلَمِي (445-509هـ)، تحقيقا ودراسة"	92
978-989	نورية محمد الشريف	ظاهرة تراكم وتكدس النفايات الصلبة (القمامة) في منطقة سوق الخميس / الخمس	93
990-1004	Ahmid Emhemed Daw Altomi Zahia Kalifa Daw Musdeq	Vitamin D deficiency and its effect on human health in the city of Al-Jamil	94
1005-1014	محمود محمد رحومة الهوش	حصة التربية البدنية وعلاقتها بالتحصيل الدراسي لدى تلاميذ المرحلة النهائية للتعليم الثانوي ببلدية العجيلات	95
1015-1031	عبد المنعم منصور الحر	التهديدات الإيرانية وتأثيرها على الأمن القومي السعودي "دراسة تحليلية للنزاع في اليمن خلال الفترة من 2011 إلى 2014"	96
1032-1040	Fuzi Elkut Sabri M. Shalbi	A Review of mAs Optimization Strategies in CT Imaging: Maximizing Quality and Minimizing Dose simultaneously	97
1041-1049	Mostafa Omar Sharif Adel Omar Aboudabous	An overview of fish muscle physiology, omics, environmental, and nutritional strategies for enhanced aquaculture	98
1050-1058	أنيس محمد عبد الهادي الصل	دلالات صدق وثبات مقياس الطفل التوحدي على البيئة المحلية لمدينة مصراتة_ ليبيا للأعمار من (3 _ 10) سنوات	99

1059-1067	Abdaladeem Mohammad Hdidan	The Role and Effect of AI in Translation	100
1068-1077	علي معتوق علي صالح	التعزير في الشريعة الإسلامية وتطبيقاته في القانون الجنائي المعاصر: دراسة تطبيقية على القانون الليبي	101
1078-1083	Hana Wanis Elfallah Hnady Hisham Alsiywi	Antagonistic Activity of Rhizobium sp Against some Human Pathogenic Microorganisms	102
1084-1089	Fuzi Mohamed Fartas Ramdan Ali Aldomani Ahmed Mohammed Mawloud Alqeeb Galal M. Zaiad	Determination of Arsenic and Cadmium in the Seawater Samples using Atomic Absorption Spectrometry	103
1090-1096	عبد السلام صالح علي انبيص مصعب مفتاح محمد الشريف	" التحديات التي تواجه الأندية الرياضية بمدينة الخمس في تشكيل فرق كرة اليد"	104
1097	الفهرس		